Mathematik
Fünftes Schuljahr

Warum es gut ist, das Denken in beweglichen Bildern zu üben

Als Beispiel soll hier zunächst eine Aufgabe aus der „Pisa Studie“ dienen:

Martin und Maria gehen beide in dieselbe Schule. Martin wohnt fünf Kilometer von der Schule entfernt, Maria zwei Kilometer. Wie weit wohnen Martin und Maria von einander entfernt?

Wie würdest du diese Aufgabe spontan lösen?

Stelle dir vor: Martin und Maria vor deiner Schule. Jetzt stehen sie an der Straße. (Siehst du sie?)

Wichtig: Was kann jetzt alles geschehen? Laß deine Phantasie spielen.

1. Sie sagen „Tschüs“ und gehen in entgegengesetzten Richtungen davon. Dann legt Maria vom Trennpunkt aus zwei Kilometer zurück Martin fünf, macht zusammen sieben.

2. Sie können nun aber auch miteinander in dieselbe Richtung gehen. Dann verabschiedet sich Maria nach zwei Kilometern, und Martin hat noch drei zu gehen.

3. Es können auch Straßen in allen möglichen Richtungen von der Schule wegführen. Wir können uns das von oben, wie einen Stadtplan vorstellen. Dabei sehen wir, daß die beiden nie so weit voneinander oder so nahe beieinander wohnen können wie an der geraden Straße.
Also lautet die vollständige Lösung: Die weiteste Entfernung beträgt sieben Kilometer, die kürzeste drei. Dazwischen ist alles möglich.
Hat dich dieses Beispiel über die Wirkung bildhaften Denkens als Hilfe beim Rechnen überzeugt?
Hast du Probleme beim Erstellen von Bildern vor dem „inneren Auge?“
Wenn ja, stelle dir zunächst Dinge vor, die du schon kennst, die aber gerade nicht sichtbar sind, wie z.B. dein Zimmer zuhause, dein Frühstück von heute morgen, dein Klassenzimmer, Lehrer, die du magst oder auch nicht magst, ein schönes Erlebnis aus den letzten Ferien, deine Lieblingspersonen aus Filmen oder Videospielen. Achte darauf, daß deine Bilder farbig und beweglich sind.

Wiederhole sie und laß sie dabei immer besser werden. Setze am besten alles, was du liest, in Bilder um. Vor allem Textaufgaben.

Nehmen wir uns ein Beispiel, Wort für Wort, Satz Für Satz.

Herr Müller
Kennst du einen? Du kannst dir einen x beliebigen Mann vorstellen. Gleich wird die Vorstellung leichter:
bezahlt
Jetzt wird das Bild klarer, weil er etwas tut, aber es bleibt noch Spannung.
260€ im Monat für Miete.
Den ganzen Satz in einem Bild: Herr Müller hält 260€ in der Hand. Vielleicht steht er damit vor seinem Vermieter. Wir können auch die 260€ mit Minus versehen auf seinem Kontoauszug sehen. Oder fiel dir ein anderes Bild ein? Jedenfalls mußt du es jetzt festhalten.

Weiter:
Das ist
Wenn dein Bild noch da ist, dann ist dir sofort klar, daß der „Stellvertreter“ „Das“ für die 260€ steht.
der vierte Teil seines Monatseinkommens.

Probleme mit dem „vierten Teil“? Na, Vier haben geteilt. Jeder sollte gleichviel bekommen. In meinem Bild sitzt Herr Müller jetzt an einem Tisch und hat sein Monatsgehalt auf die vier Ecken **verteilt**. So kann mich die Frage nicht überraschen:

Wie viel verdient Herr Müller im Monat?

Ich schiebe die Teile zur Mitte und sehe auf dem Tisch zwei Hunderter, einen Fünfziger und einen Zehner (oder sechs Zehner) in einer Reihe, dahinter noch mal, noch mal und noch mal. Das ist das Einkommen.
Wie rechnen? (Wahrscheinlich weißt du es längst.)
Einfachster Weg:
Wir nehmen die Zehner zusammen, macht 40, die Fünfziger ergeben zusammen 200. Die Zweihundert zählen wir mit den vorhandenen Hundertern zusammen. (Deswegen müßte man jetzt beim schriftlichen Addieren eine zwei nach links verschieben) So ergeben sich 1040€.
Zwar hoffe ich, daß du einmal mehr verdienst, aber unsere Rechnung stimmt.

Du meinst, das kann man auch kürzer rechnen? Da hast du voll recht! Sehen wir noch einmal die **Reihen** vor uns. Vier sind es, **in jeder liegen gleichviel**, 260€, also dürfen wir den kürzeren Weg der **Multiplikation** nehmen:

260€ * 4 = 1040€

Atempause.
Wenn du noch nicht so gut mitgekommen bist, mach dir keine Sorgen, denn Alles kommt mit der Zeit, wenn man im Üben nicht nachläßt.
Wenn du es geschafft hast, bist du schon weiter als ein Teil meiner letzten Hauptschulklasse am Anfang der neunten Klasse!
Da ging es um Prozentrechnen. (Das ist genaugenommen auch nur ein Rechnen mit Teilen.) Die Aufgabe war ähnlich gestellt, aber ein Teil des Grundkurses scheiterte an dem „Das“. Für mich kein Kompliment, da ich auch den Deutschunterricht erteilte, und beim Lesen immer wieder auf die Rolle der Stellvertreter hinwies. Aber die Schüler, die die Aufgabe nicht verstanden, hatten sich schon in der fünften Klasse geweigert, Gelesenes in Bilder umzusetzen. Lehrerschicksal!
Aber du weißt ja nun, daß man leicht erkennt, wofür ein „Stellvertreter“ dasteht, wenn man das Bild des vorhergehenden Satzes festgehalten hat.
Jede Textaufgabe ist eine Geschichte, ob länger oder kürzer. Darum kann ich den richtigen Lösungsweg erst finden, wenn ich den Verlauf zusammenhängend überschaue. Zum Beispiel brauche ich ja auch die Übersicht über eine Landschaft, wie sie mir in etwa eine Wanderkarte vermitteln kann, wenn ich ein mir unbekanntes Gebiet ohne Irrwege durchwandern will.

Wenn du dich im Erstellen von Bildern vor dem „inneren Auge“ noch nicht sicher fühlst, dann kannst du mal nach Belieben im Anhang üben. Dort findest du Übungen im „Kreativen Verknüpfen“ nach der Geisselhart – Methode.

Entscheide dich niemals für ein Rechenverfahren in Zahlen, bevor deine Übersicht über den Text vollständig ist!

Nun auf zum Üben an verschiedenen Aufgaben. Bleiben wir erst mal bei Geld.

5. 1) Hannes will sich ein Mountainbike für 529 € kaufen. 235 € hat er schon gespart. Oma legt 120 € dazu, Tante Hildchen 75 €. Wie viele € fehlen Hannes jetzt noch?

Auch wenn du schon weißt, wie gerechnet werden kann, bemühe dich trotzdem zur Übung um die Bilder, die Andere erst brauchen, um zur Lösung zu kommen.

Für den ersten Satz kann ich das Mountainbike mit Preisschild im Schaufenster sehen. Nun weiß ich, was Hannes braucht. Der zweite kann ihn beim Kassensturz darstellen, das Geld vor sich auf dem Tisch. Daraus sollen wir berechnen können, was ihm noch fehlt.

Was Hannes braucht /	Was er hat /	was noch fehlt
529 €	235 €, 120 €, 75 €	?

Das sieht schon aus wie ein Rechenausdruck, also ein Term. Nur die Rechenzeichen fehlen noch. Wenn ich wissen will, Wieviel in meiner Sparkasse ist, was tue ich? Aha, zusammenzählen, addieren! Also kommen Pluszeichen zwischen die Summen, die Hannes hat.
Was er hat, geht vom Kaufpreis ab, was übrigbleibt, das fehlt. Also Minuszeichen nach dem Kaufpreis. *(Brauchst du noch Bilder? Dann links die 529 € in Einern, Zehnern und Hundertern, daneben das Gesparte in Zehnern und Hundertern. Für jeden Schein, den Hannes hat, kann man einen vom Preis wegnehmen.)*
Das sähe dann so aus:

529 € - 235 € + 120 € +75€ =

Was passiert nun, wenn wir der Reihe nach rechnen?

Wir würden nur die 235 € vom Preis wegnehmen und mit dem Rest das Rad teurer machen. Da das nicht stimmt, müssen wir zuerst addieren was er hat, dann das vom Preis subtrahieren. (So läuft ja auch die Geschichte!) Damit das gleich klar ist, setzen wir eine Klammer.

529 € - (235 € + 120€ +75 €) =

529 € - 430 € = 99€

5. 2) In den Heizöltank der Familie Brummler gehen 12000 hinein. Beim Auffüllen zeigt der Abgabeanzeiger am Auto des Ölhändlers 8943 Liter an. Wie viele Liter Öl enthielt der Tank vor dem Auffüllen?

Welche Bilder hast du?
Ich stelle mir den Heizöltank mal durchsichtig, wie aus Plexiglas vor. Oben ist ein Strich, an diesem steht: 12000 l. Unten ein Rest Öl, von dem ich nicht weiß, wie viel es ist. Aber wie viel zwischen der Oberfläche des Rests und den 12000 fehlt, das sehe ich auf dem Abgabenanzeiger.
Welche Geschichte lief hier? Wir dürfen annehmen, der Tank war voll, dann wurde in der Heizperiode Öl verbrannt, und der Rest blieb übrig. Dann wurde ersetzt, was verbraucht worden war. Setzen wir die Geschichte in eine Rechnung um! Wenn dem Tank Öl entnommen wurde, welches Zeichen gehört dann davor?

Im Tank Verbrannt übrig
12000 l – 8943 l = 3057 l

Alles klar?

5. 3) Sven Katzenpeter hat seine Pokemonkarten, einen Gameboy und einige Videospiele auf dem Flohmarkt verkauft. Insgesamt hat ihm das 257 € eingebracht. Nachdem er diese (Stellvertreter!) **auf sein Sparkonto eingezahlt hat, beträgt sein Guthaben 443 €. Wieviel hatte er vor der Einzahlung auf dem Konto?**

Was stellst du dir vor?
Wenn du ein eigenes Konto hast, weißt du wie ein Auszug aussieht. Da sähen wir:

	Übertrag: EUR	Tintenklecks
Datum	Einzahlung EUR	257 +
	Guthaben: EUR	443 +

Du kannst dir aber auch vorgestellt haben, wie Sven dem Kassierer die 257 € auf den Tresen gezählt hat. Oder noch etwas anderes.

Jedenfalls war ein uns noch unbekannter Betrag auf dem Konto, dann kamen 257 € dazu, und am Ende betrug das Guthaben 443 €. Das ist die Geschichte.

Unbekannter Betrag Einzahlung Guthaben
? + 257 € = 443 €

Hier scheint eine Aufgabe verkehrt herum dazustehen. Was war vor der Einzahlung da? (Sicher weißt du es schon!) Aber gehen wir mal für Alle genau ins Bild:
Ich sehe was Sven nun auf dem Konto hat: Vier Hunderter, vier Zehner, drei Einer
Dann den eingezahlten Betrag auf dem Tresen: Zwei Hunderter, fünf Zehner, sieben Einer

Übe dich mal bitte im Festhalten dieser Bilder!

Findest du es blöd, wenn ich jetzt frage, wie es sein kann, daß Sven sieben Einer eingezahlt hat und jetzt nur noch drei da sind?
Wenn ja, wie würdest du einem Mitschüler erklären, wie es kam?
Aha! Wie viele Einer mußten schon dagelegen haben, daß durch das Hinzukommen von sieben Einern ein Zehner entstand und drei Einer übrigblieben?
Klar! Sechs!
Jetzt wissen wir schon mal, wie viele Einer vorher da waren! Schaffen wir das auch mit den Zehnern?
Die überzähligen Einer wurden in einen Zehner umgewechselt. Fünf Zehner hat Sven eingezahlt, einer rutschte rüber, macht sechs. Aber vier liegen auf dem Guthaben. Das Problem hatten wir doch schon!
Es müssen also vorher acht Zehner dagelegen sein. Macht zusammen also vierzehn Zehner, ergibt einen Hunderter und vier Zehner.
Zwei Hunderter hat Sven eingezahlt, einer ergab sich aus überzähligen Zehnern, macht drei, also fehlt noch einer.

Was haben wir jetzt eigentlich getan? Von der Einzahlung zum Guthaben „hinaufgezählt“. Also „minus“ gerechnet!
Du hast wohl sicher gleich gedacht:

Ja, da nehmen wir doch die Einzahlung einfach wieder runter!
So wurde aus der Frage:
? + 257 € = 443€
die Rechnung
443 € - 257 € = 186 €
Rechnerisch ist das eine **Umkehrung.**

Habe ich dich sehr gelangweilt? Ja? Dann halte mir bitte zugute, daß nicht alle Kinder so schnell sind wie du! Aber vielleicht sind dir zwei Dinge klargeworden:

1. Wenn ich nicht weiß, wie rechnen, helfen genaue Bilder
2. Wenn sich jemand schwer tut, kann ich ihm mit Bildern helfen.

Probieren wir das mal an einer Aufgabe, die auf den ersten Blick schweinemäßig schwer aussieht:
5. 4) Ein Lehrjunge, ein Maurer und ein Meister haben zusammen 3252 € verdient. Damit jeder standesgemäß bezahlt wird, soll der Maurer doppelt so viel wie der Lehrjunge und der Meister dreimal so viel wie der Lehrjunge bekommen. Wieviel erhält jeder?

Stehen deine Bilder?
Meinetwegen so, daß Lehrjunge, Maurer und Meister an einem Tisch sitzen, auf dem 3252 € liegen. Siehst du alles?
Wie kann der zweite Satz ins Bild gebracht werden?
Wenn du einen Euro vor den Lehrjungen legst, dann …
Mit diesem Bild kannst du die Aufgabe lösen. Überlege erst mal selbst, nimm dir Zeit für deine eigenen Vorstellungen.

Vielleicht hast du auf das Geld geschaut und dir gesagt, wenn ich nun einen Hunderter vor den Lehrling lege, dann bekommt der Maurer zwei und der Meister drei. Ergibt eine Reihe mit sechs Hundertern.
Bis 3000 € weg sind liegen fünf Reihen
Dann kommen die Zehner, immer sechs in einer Reihe.
Mit vier Reihen kommen wir auf 240 € von den restlichen 252 €.
Bleiben noch ein Zehner und zwei Einer. Wechseln wir um in Eineurostücke. Dann wie am Anfang schon gesehen.
Welche Reihen hatten wir?
Fünf Reihen Hunderter
Vier reihen Zehner
Zwei Reihen Einer
Dann sehe ich vor dem Lehrling liegen: Fünf Hunderter, vier Zehner, zwei Einer.
Also 542 €. Der Maurer hat zweimal so viel und der Meister dreimal.
Du siehst, wenn ich von einem genauen Bild der Aufgabe ausgehe, kann ich sie auf ganz einfache Art lösen. <u>Je besser meine Bilder sind, desto weniger Angst muß ich haben</u>!

Vielleicht hast du aber schon beim ersten Verteilen von Eurostücken gedacht: „Aha, eine Reihe, da kann ich multiplizieren.“ Der Gedanke ist nicht schlecht. Wenn du nun ausprobierst, mit sechs zu multiplizieren, bis du 3252 erhältst, kommst du ebenfalls zur Lösung.

Das könnte so aussehen:
Erst will ich auf 3000 kommen. Das Sechsereinmaleins sagt mir: 5*6 = 30;
Dann ist 50*6 = 300; und 500* 6 = 3000;
Bleiben 252, was sagt das Einmaleins hier?
4*6 = 24; 40*6 = 240;
Bleiben noch 12
Na, klar: 2*6 = 12
Also haben wir 500 Sechserreihen, 40 Sechserreihen und 2 Sechserreihen.

Natürlich geht es auch kürzer:

Wir sehen noch einmal einen Euro auf dem Tisch für den Lehrjungen, zwei für den Maurer und drei für den Meister. Wir könnten nun den ganzen Betrag in Eineurostücke umwandeln und Reihe um Reihe legen, bis es 3252€ sind. Viel Arbeit!

Aber es gibt eine Rechenoperation, die uns auf einen Schlag sagt, wie viele Sechserreihen in den 3252 **enthalten** sind:

3252 : 6 = 542

In jeder Reihe liegen: Für den Lehrling 1€, also 542 * 1€
Für den Maurer 2€, also 542 * 2€
Für den Meister 3€, also 542 * 3€

Stelle dir bitte noch einmal vor, wie 3252 Eurostücke in Sechserreihen **eingeteilt** werden.

Du lernst daraus: Wenn ich durch den Inhalt einer Reihe dividiere, erhalte ich die Anzahl der Reihen!

5. 5) Herr Gastreich besorgt sich im Supermarkt 3 Kisten Apfelsaft zu je 3,75 € und zwei Kisten Mineralwasser zu je 2,50 €. Das Pfand beträgt für eine Kiste Apfelsaft 2,40 € und für eine Kiste Mineralwasser 2,80 €. Herr Gastreich hat aber je eine leere Kiste Apfelsaft und Mineralwasser zur Rückgabe dabei, und bekommt also Pfand zurück.
Wieviel Wechselgeld erhält er, wenn er mit einem 50 € Schein bezahlt?

Siehst du die Kisten mit den Preisen im Einkaufswagen vor dir? Kannst du ohne in den Text hineinzusehen sagen, was der Herr kauft, was er zurückgibt und womit er bezahlt?
Bei so vielen Zahlen kann man leicht ein wenig durcheinander werden. Da schafft die Kurzfassung eine klare Übersicht. Eine Kurzfassung sollte möglichst immer in eine Zeile passen. Bei besonders langen Aufgaben kann man ja das Nebenrechnungsblatt quer nehmen. Da du ja weißt, worum es geht, kannst du in jeder Weise abkürzen. Z.B. A. für Kiste Apfelsaft. Dann kann deine Kurzfassung etwa so aussehen:

Kurzfassung:
3 A, je 3,75€/ 2 M, je 2,50 €/ Pfand: A 2,40 €, M 2,80 €/ je einmal zurück/ 50€/ Wechselgeld?

Deine genaue bildhafte Vorstellung sagt dir z. B., daß die Apfelsaftkiste samt Preisschild dreimal da ist, u. s. w.
Nun kannst du dir aber auch vorstellen, daß auf jeder Kiste neben dem Preisschild auch noch das Pfand aufgeklebt ist. Dann wird die Kurzfassung übersichtlicher:

Kurzfassung geordnet:
3 A, je 3,75 € + 2,40€ Pf. / 2 M, je 2,50€ + 2,8o€ Pf./ Pf je einmal zurück/ 50€ / Wechselgeld?

Überlege jetzt mit Hilfe deiner bildhaften Vorstellung und der Kurzfassung, was du rechnen mußt, um zur Lösung zu kommen.
Dann kannst du die geordnete Kurzfassung in Rechenschritte umsetzen, ohne den Überblick zu verlieren.

Preis für Apfelsaft:	Preis für Mineralwasser:	Gesamtpreis:	Zurückgezahltes Pfand.
3* (2,50€ +2,80€) =	2 * (3,75 € +2,40€)=	Preis A + Preis M	2,40€ + 2,8o€

Wie wird die Verkäuferin mit dem zurückzuzahlenden Pfand umgehen?
Sie kann es sowohl von dem Gesamtpreis der Getränke abziehen als auch nach dem Abzug des Getränkepreises dazulegen.
Im ersteren Fall sähe die Lösung so aus:
Gesamtpreis – Zurückgezahltes Pfand = Gesamtkosten
50 € - Gesamtkosten = Wechselgeld

Im anderen Fall so:
50 € - Gesamtpreis für Getränke = Zwischensumme
Zwischensumme + Zurückgezahltes Pfand = Wechselgeld

Verlangt dein Lehrer einen durchgehenden Ansatz, also einen Term, so müssen wir davon ausgehen, daß das auszugebende Geld ja von den 50 € abgezogen wird, also kann ich diese ja auch an den Anfang stellen. (Dann spielt die Szene unseres Films, nach der wir rechnen, an der Kasse.) Nur bei der Verrechnung des Rückpfands muß ich dann aufpassen. Überlege: Wenn ich Minus vor das setze, was Herr Gastreich bezahlen muß, was setze ich dann vor das, was er bekommt? (Siehe Fall zwei!)
In Worten:
50 € - Preis für die Getränke mit Pfand + Rückpfand = (Wechselgeld)

Zu den Klammern:
Schau noch einmal auf die Darstellung oben. Warum wurden Preis und Pfand in Klammern gesetzt? Unser Bild zeigt: Auf jedem Kasten kleben Preisschild und Pfandschild. Also sind beide bei A dreimal da und bei M zweimal! Setze ich keine Klammer, dann besteht die Gefahr, daß ich nur den Preis multipliziere, und das Pfand dann einmal addiere. Das würde nicht stimmen, sagt mein Bild. Beim Rechnen kann ich dann erst die Klammern ausrechnen und dann multiplizieren. Wie geht es aber noch? (Bild!)
Ja! Z. B. ist $3*(2{,}50 + 2{,}80) = 3*2{,}50 + 3*2{,}80$ (Preis und Pfand sind je dreimal da!)

Da wir erst den Preis für Getränke und Pfand ausrechnen und dann von den 50€ subtrahieren wollen, fassen wir die Preisberechnung in einer eckigen Klammer zusammen. Das sieht dann so aus:

Ansatz / Term:
$50€ -[3 * (2{,}50€ + 2{,}80€) + 2 * (3{,}75€ + 2{,}40€)] + (2{,}40€ + 2{,}80€) =$
$50€ - [3 * 5{,}30€ + 2 * 6{,}15€] \quad + \quad 5{,}20€ =$
$50€ - [15{,}90€ + 12{,}30€] \quad + \quad 5{,}20€ =$
$50€ - \quad 28{,}20€ \quad + \quad 5{,}20€ = \quad 27{,}00€$

5. 6) Sergej soll für seinen Vater Briefmarken besorgen. Sein Vater drückt ihm 30 € in die Hand und sagt: „Bringe 25 Marken zu 0,56 € und für den Rest des Geldes Briefmarken zu 1,12 € und 1,53 €. Wir brauchen aber doppelt so viele zu 1,53 € wie zu 1,12 €. Was übrigbleibt, kannst du behalten.“ „Kann ja nicht viel sein!“ brummt Sergej. Behält er recht?

Kurzfassung:
30 € / 25 M für 0,56 €/ für Rest 1,12€ und 1,53 € / doppelt so viele 1,53 € wie 1,12€/ Übrig?

Auszurechnen, was die 56 Cent Marken kosten, und wieviel Geld dann noch da ist, dürfte wohl nicht schwierig sein. Aber wie soll das mit der doppelten Anzahl gehen?
Hier hilft die Vorstellungskraft besonders gut:
Ich stelle mir vor:
Eine Briefmarke mit der Aufschrift 1,12 € und daneben zwei mit der Aufschrift 1,53 €.
So entsteht eine Reihe. (Hatten wir doch schon mal!)
Nun könnte ich Reihe zu Reihe addieren, bis zu dem noch vorhandenen Geldbetrag keine volle Reihe mehr einsetzbar ist. (wenn ich mir eine Reihe vorstelle, weiß ich schon, wieviel Sergej allerhöchstens bekommen kann. Du auch?) Es geht aber doch auch kürzer. Wir wollen doch wissen, wie oft der Inhalt einer Reihe im Restgeld **enthalten** ist! Alles klar?
In Einzelschritten verläuft die Rechnung dann so:

Marken für 0,56 €	Rest	Eine Reihe?	Enthalten im Rest?	Übrig?
25 * 0,56 €	30€ - 25 * 0,56€	1,12E+2*1,53€	Rest : Reihe	Rest der Division

Bei einem durchgehenden Ansatz kommt das vorhandene Geld an den Anfang, wie bei Aufgabe 5. Das Subtrahieren des Preises der 56 Cent Marken muß vor der Division vollzogen sein. (Deswegen fasse ich diesen Vorgang in einer Klammer zusammen.)
In Worten.
30 € - Preis für 25 0,56 € Marken : Preis einer Reihe = Anzahl der Reihen mit Restgeld

Term:
$(30€ - 25 * 0{,}56€) : (1{,}12€ + 2 * 1{,}53€)=$
Hier kommt die Regel **Punkt geht vor Strich** vor. Wenn ich erst von den 30 die 25 subtrahierte und dann mit 0,56 multiplizierte, das wäre doch eine Verfälschung der im Bild festgelegten Tatsache. **Eine Multiplikation besteht immer aus einer Anzahl von Reihen.** Wenn ich die Anzahl oder die Reihen verändere, macht das am Ergebnis einen großen Unterschied aus. Kannst du dir dazu etwas vorstellen? Wenn nicht, denke mal an Sergejs Briefmarken oder Herrn Müllers Geld. Oder ein Backblech voll mit deinen Lieblingsplätzchen, schön in Reihen geordnet. Was geschieht mit dem Ergebnis, wenn Du zu jeder Reihe eins dazulegst oder von jeder eins wegnimmst? Eine ganze Reihe wegnimmst?

Ebenso muß klargestellt werden daß durch die <u>Summe</u> aus 1,12 und 2*1,53 dividiert wird. (Die einzelne Reihe setzt sich aus beiden Beträgen zusammen.) Wie wäre es ohne Klammer?
-
Rechnung:
$(30€ - 25 * 0{,}56€) : (1{,}12€ + 2 * 1{,}53€)=$
(30€ - 14,60€) : (1,12€ + 3,06€) =
15,40€ : 4,18€ = 3 Rest 2,86(€)

Ob der gute Sergej jetzt wohl zufrieden ist? Immerhin hat er ja fast den zehnten Teil der 30€ bekommen!

In der folgenden Aufgabe ist ein kleiner Denkschritt versteckt. Wenn du dir aber die ganze Geschichte genau vorstellt, indem du mit Sarah ihren Schulweg gehst, wirst du ihn ganz selbständig vollziehen.

Aufgabe
5. 7) Sarah hat von ihrem Elternhaus bis zu ihrer Schule einen Weg von 1,5 Kilometern zu gehen. Für einen Kilometer braucht Sarah 15 Minuten. Wie lange war sie während einer Fünftagewoche zu Fuß unterwegs, wenn ihr Vater sie an zwei Tagen mit dem Auto von der Schule abgeholt hat?
(Eine Zeichnung mit dem Weg als Strecke, grob eingeteilt in km und Zeit darüber kann hier gut helfen)
Wenn du mit Sarah gehst, bis sie wieder zuhause ist, wirst du genau wissen, wie viele km sie an einem Tag zu gehen hat. (Wenn sie nicht abgeholt wird)
Kurzfassung:
3 km Schulweg/ für 1 km 15 Min/ Wie lange in 5 Tagen, wenn zweimal abgeholt?

Hier ist der Denkschritt, daß zum Schulweg auch der Nachhauseweg gehört, bereits vollzogen. Wer beim Lesen anfangs nicht auf den Nachhauseweg kommt –dann ist allerdings das Bild nicht genau - wird durch das Abholen daran erinnert. (Entschuldige, wenn ich dich unterfordert habe.)
Wenn du dir nun den Lösungsweg überlegst kommst du zu einer Neufassung der Kurzfassung, die so aussehen könnte:

Kurzfassung geordnet:
3 km Schulweg pro Tag/ 5 Tage/ Zweimal Rückweg gespart/ 1 km in 15 min/ Wie lange?

Rechnung in Einzelschritten:

Schulweg in 5 Tagen	Abzug für Abholen	Zurückgelegte km	Zeit
3km * 5 =	2* 1,5km =	Schulweg – Abzug	Zurückgelegte km * 15 Min

Es geht auch kürzer:
Wenn du wirklich in deiner bildhaften Vorstellung mit Sarah gehst, und dadurch die ganze Aufgabe zu einem Film wird, wirst du feststellen, daß Sarah dreimal den Hin – und Rückweg zurücklegt und zweimal nur den Hinweg. Also legt sie die 1,5 km acht Mal zurück. Dann wird die Rechnung kürzer:
Zurückgelegte km / Zeit
8*1,5 = / km *15 = (Ergebnis in Min)

Hierzu ist auch der Ansatz leicht:
8*1,5 *15Min =

Gehe ich nach der Kurzfassung, kann es folgendermaßen aussehen.
In Worten:
Schulweg in 5 Tagen minus zweimal Abholen mal 15 ist gleich Ergebnis in Minuten

Term:
(5*3 – 2*1,5) *15Min =
Punkt vor Strich! (Warum weißt du ja bereits!)

(15 - 3) * 15 Min =
12 * 15 Min = 180 Min

Wie oft sind die 60 Minuten, die eine Stunde ergeben in den 180Min **enthalten**?
Können wir doch im Kopf! Klar! Dreimal, also drei Stunden Schulweg.

Gerade bei dieser Aufgabe konntest du feststellen, daß das Rechnen um so leichter wird, je genauer die bildhafte Vorstellung ist.

Laß uns nun noch eine schwierige Aufgabe gemeinsam lösen. Gib dir aber Mühe mit deiner Vorstellung und versuche, nach dem Lesen rein aus deiner Vorstellung heraus einen Lösungsweg zu finden. Das ist nicht einfach, aber selbst wenn du es nicht schaffen solltest, war es doch gutes Training. Training führt nur zu Wachstum, wenn man an seine Grenzen geht. Denn nur wer bis an seine Grenzen geht, kann darüber hinauswachsen.

5. 8) Die Klasse 5b verkauft auf dem Basar zur Flutopferhilfe Kaffee und Käsekuchen. Eine Tasse Kaffee kostet 0,60 €, ein Stück Käsekuchen 1,20 €, ein Gedeck (Tasse Kaffee mit einem Stück Käsekuchen) 1,50 €. Am Ende sind 187 Gedecke und 62 einzelne Tassen Kaffee verkauft. Mache Gäste nahmen nur ein Stück Käsekuchen. 9 Stücke bleiben übrig. In der Kasse kommen 399,30 € zusammen.
Jeder Kuchen war in 12 Stücke zerschnitten worden. Wie viele Kuchen haben die Klassenmütter dann gebacken?

Was wurde alles verkauft?
Stellen wir uns das alles an einem langen Tisch nebeneinander vor, mit den Preisschildern neben dem, was jeweils verkauft wird, und einen Kassentisch, meinetwegen mit Klassenlehrerin und Klassensprecher, dann kommen wir gleich zu einer geordneten Kurzfassung.
Kurzfassung geordnet:

Tassen Kaffe	Stücke Kuchen einzeln	Gedecke	Kasse	Jeder Kuchen in 12 Stücke
0,60€, verk.62	1,20€, verk. ? 9 übrig	1,50€, verk. 187	399,30€	Wie viele Kuchen gebacken?

Nimm dir noch einmal Zeit für ein genaues Bild. Siehst du, was jeweils weggeht und was dabei in die jeweilige Kasse kommt?

Was hat der Verkauf der Gedecke mit den einzelnen Kuchenstücken zu tun?
Was geschieht mit den einzelnen Einnahmen, wenn der Basar zuende ist?

Von den einzelnen Verkaufsstellen werden die Erlöse zur Kasse getragen.

Erlös Tassen + Erlös Stücke Kuchen(unbekannt) + Erlös Gedecke = Inhalt der Kasse

Da haben wir den Inhalt der Kasse, wissen aber nicht, wie viel die Kinder, die einzelne Stücke verkauften, hergebracht haben. Was tun?
Natürlich! So etwas Ähnliches hatten wir doch schon. Ich sage nur: Katzenpeter! Nehmen wir hier die beiden bekannten Beträge aus der Kasse, dann bleibt der unbekannte übrig!

Umkehrung
Inhalt der Kasse –Erlös für Tassen Kaffee – Erlös für Gedecke = Erlös für Stücke Kuchen

Für jedes einzelne Stück kamen 1,20€ auf den Tisch für Einzelstücke. Also müssen wir errechnen, wie oft die 1,20€ in dem Erlös **enthalten** sind. Wo noch Stücke Kuchen verkauft wurden und wie viele, das haben wir doch im Bild, oder? Der Rest ist dann ein Kinderspiel.
Dann sieht die Rechnung in Einzelschritten so aus:

Erlös Tassen	Erlös Gedecke	Erlös Stücke Kuchen einzeln	Verkaufte Einzelstücke	Gesamtzahl Stücke	Gebackene Kuchen
0, 60*62	1,50*187	399,30 –Erlös Tassen-Erlös Gedecke	Erlös Kuchen:1,20	Verkaufte Einzelstücke +187 + 9	Gesamtzahl : 12

Um alles in einem Ansatz zu berechnen, müssen wir den Kasseninhalt an den Anfang stellen.

In Worten:
Kasse – Erlös Tassen – Erlös Gedecke :Einzelpreis Kuchen + Anzahl Gedecke + Übrige:12

Term:
$[(399{,}30 - 0{,}60 * 62 - 1{,}50 * 187) : 1{,}20 + 187 + 9] : 12 =$
(Kannst du das Setzen der Klammern nachvollziehen? Wenn nicht, blättere zurück.)
$[(399{,}30 - 37{,}20 - 280{,}50) : 1{,}20 + 196] : 12 =$
(Weißt du, woher die Zahlen in der zweiten Zeile kommen?)
$[81{,}60 : 1{,}20 + 196] : 12 =$
(Kennst du dich auch jetzt noch aus?)
$[68 + 196] : 12 =$
$264 : 12 = 22$

Ich schlage dir vor, den Lösungsweg vom Text bis zum Term nocheinige Male durchzugehen. Deine Übersicht über Lösungswege wird sich dadurch verbessern.

Übe nun bitte selbständig an folgenden Aufgaben, indem du zunächst eine Kurzfassung erstellst, diese –wenn nötig – ordnest und dann den Lösungsweg in Einzelschritten oder als Term darstellst. (Am besten Beides!) Vergiß aber die Bilder nicht.

5. 9) Eine Marktfrau kauft von einem Obstbauern 25 Kartons mit je 50 Äpfeln. Jeder Karton kostet sie 15€. An Helfer und Stammkunden verschenkt sie insgesamt 63 Äpfel. Wieviel Geld bleibt ihr als Gewinn, wenn sie für einen Apfel 0,80 € verlangt?

(Stelle dir genau vor, was „Gewinn“ bedeutet!)

5. 10) Swetlana schafft beim Wandern 5 km in einer Stunde. Nach jeweils zwei Stunden legt sie eine Pause von einer halben Stunde ein. Nach wie vielen Stunden kommt sie wieder nach Hause, wenn ihr Wanderziel 15 km entfernt liegt?
(Zeichnung?)

5. 11) Familie Gertje hat für ihre Ölheizung einen Tank mit 5000 l Fassungsvermögen. Pro Monat verbrennt die Heizung 250 l Öl. Als noch 500l im Tank sind, bestellt Herr Gertje Öl. Der Preis mit 80 Cent pro Liter erscheint ihm hoch, und so läßt er nur 2500 l einfüllen. Drei Monate später ist der Preis auf 60 Cent gesunken. Nun läßt Herr Gertje den ganzen Tank füllen.
Was hat der Öleinkauf in diesem Jahr gekostet?

Rechenwege:
5. 9) Kurzfassung:
25 Kart. Mit 50 Ä./ Jeder Kart. 15 €/ 63 Ä verschenkt/ Wieviel Gewinn, wenn 0,80 € pro A?

Bei der Planung ist es wichtig, daß der Einkaufspreis errechnet werden muß, und daß sich der Verkaufspreis aus der Anzahl der tatsächlich verkauften Äpfel ergibt. Zuerst gibt die gute Frau ja Geld aus. Das muß erst wieder hereinkommen, bevor man von Gewinn reden kann.

Kurzfassung geordnet:
25 Kart. je 15 €/ 50 Äpfel je Kart, 63 verschenkt/ 0,80 € pro Apfel/ Gewinn?

Rechnung in Einzelschritten

Einkaufspreis	Verkaufte Äpfel	Verkaufspreis	Gewinn
25*15 €	25*50-63	Verk. Äpfel * 0,80 €	Verkaufspreis - Einkaufspreis

Aufbau des Ansatzes in Worten.

Verkaufspreis - Einkaufspreis = Gewinn
Verk. Äpfel * 0,80 € - Anzahl Kart * Preis = Gewinn

Term:
$(25 * 50 - 63) * 0{,}80€ - 25 * 15€ =$

5. 10)
Alles klar mit Hin – und Rückweg? Siehst du alles?

Kurzfassung.
5 km pro h. / alle 2 h. 30 min Pause/ 15 km Entfernung/In wie vielen Stunden zurück?

Gehen wir mit Swetlana: Also, die freche Swetty geht aus dem Haus, läuft zwei Stunden, setzt sich dann hin und futtert den halben Rucksack leer. (Hoffentlich sonst nichts!) Wie weit ist es dann noch zum Ziel? Aha, nach der Pause braucht sie eine Stunde zum Ziel und nach einer weiteren ist sie wieder genau am selben Platz! Pause wie gehabt und dann noch zehn Kilometer bis nach Hause.

2h + 30min + 2h + 30min + 2h = 7h

Rechnung als Weg – Zeit Darstellung

Weg, km	5	10	12,5	17,5	20	25	30
			Pause			Pause	
Zeit, Stunden	1	2	3	4	4,5	6	7

5. 11) Kannst du dir den Füllungsanzeiger des Tanks vorstellen? Oder den Ölstand im Tank? (Hatten wir nicht schon eine ähnliche Aufgabe? Wenn man ein Problem lösen will, ist es gut, sich erst mal klarzumachen, was man schon von der Sache weiß.)

Kurzfassung:
5000 l Tank/ 250 pro Mon./ bei 500 l 2500 l für je 80 Cent/ 3 Mon. später voll für je 60 Cent
Steht dein Film?
Wenn doch noch nicht, könnte er so aussehen: Tank gefüllt bis zur 5000l Obergrenze. Leert sich bis zu 500l. 2500 nachgefüllt, Papa Gertje zahlt zum ersten Mal. 3Monate Verbrauch, bis wohin sinkt der Inhalt ab? Dann wieder auffüllen (hinaufzählen) bis 5000l. (Das ist wie bei Kasseninhalt: Wenn ich vom Ganzen wegnehme, was da ist, bekomme ich heraus, was fehlt.
Um errechnen zu können, was die zweite Füllung kostete, müssen wir wissen, wie viele Liter zu diesem Zeitpunkt im Tank fehlten.
Bei 500 l wurden 2500 l nachgefüllt und dann 3 Monate je 250 l verbraucht.

Rechenschritte:

Stand nach erster Füllung	Verbrauch	neuer Stand	2. Füllung	Kosten
500 +2500	3*250	Stand nach erster Füllung - Verbrauch	5000 – neuer Stand	1. Füll. * Preis +2. Füll. * Preis

Term in Worten:
1.Füllung*Preis + Fassungsverm.-(Stand nach 1. Füllung - Verbrauch)* Preis für 2. Füllung =
(Das ergibt den Preis in Cent)

Term:
$2500 * 80 + [5000 - (500 + 2500 - 3 * 250)] * 60 =$
(Wofür stehen die Klammern? Was könnte passieren ohne?)
$200000 + [5000 - (3000 - 750)] * 60 =$
$200000 + [5000 - 2250] * 60 =$
$200000 + 2750 * 60 =$
(Regel? Warum so?)
$200000 + 165000 = 365\,000$ (Cent)

Terme mit Löchern

Hört sich komisch an, aber hatten wir doch schon? Oder?
Fällt es dir ein? Du kannst mal zurückblättern, das gehört zum Lesen von Büchern dazu.

Unsere Geschichte zum ersten gelöcherten Term:
Bernie ist Linksaußen und Kassenwart beim Fußballverein Sieglos. Auf der letzten Generalversammlung wurde beschlossen, daß jedes Erwachsene Mitglied für die Erneuerung der Duschanlage 17,50€ auf das Vereinskonto einbezahlen soll. Bernd möchte wissen, ob es mit den Einzahlungen glatt läuft. Da neben seiner Baustelle eine Telefonzelle steht, ruft er während der Brotzeit bei Manni, dem Libero, der bei der Bank angestellt ist, an.

Bernie: Ja, hallo Manni, kannst du mir mal raussuchen, wie viele Leute schon den Sonderbeitrag eingezahlt haben?

Manni: Da hast du Pech, Bernie. Ist heute nicht möglich.

Bernie: Das kann's doch nicht geben!

Manni: Doch, Bernie! Der Computer spinnt heute.

Bernie: Wenn ich meinem Chef sage, daß mein Hammer heute spinnt, dann ist aber was gefällig.

Manni: Auch ein Linksaußen müßte den Unterschied zwischen einem Computer und einem Hammer begreifen.

Bernie: In jeder Mannschaft zwei Verrückte, der Tormann und der Linksaußen, hä?

Manni: Hast du gesagt. Warte aber mal, ich habe da was im Kopf.

Bernie: Du mußt nen Kopf haben!

Manni: Stör mich nicht. Also: Am 2. des laufenden Monats, nach dem Eingang der Monatsbeiträge und dem Abgang der laufenden Kosten lag das Guthaben des Vereins bei 22753 Euro genau. Dann kamen Einzahlungen des Sonderbeitrags. Und gestern, am 28. war das Guthaben 23512,50 Euro.

Bernie: Und was fang ich damit an?

Manni: Aber bitte Bernie, so was auszurechnen, das lernt man doch schon auf der Hauptschule.

Bernie: Danke für die Hauptschule!
Damit knallt er den Hörer auf. Was er dann noch sagen könnte ist nicht druckreif.

Könntest du Bernie helfen sein Problem zu lösen?

Die Kurzfassung hat uns Manni schon vorgegeben:

Guthaben am 2.: 22753€ / Einzahlung der Sonderbeiträge/ Guthaben am28.: 23512,50€

Was wollte Bernie wissen?
(Siehe oben)

Wie können wir uns die Einzahlung der Sonderbeiträge vorstellen?
Auf einem Kontoauszug stünden da immer wieder 17,50€ untereinander. Aber auch so müßten wir darauf kommen, daß es sich um eine **Reihe** aus immer wieder diesem Betrag handelt.
Was wir nicht wissen, ist, wieviel mal die 17,50€ dastehen, weil uns die Anzahl der Einzahler fehlt.
Das ist das Loch im Term!

Damit sieht der Term dann so aus:
22753 + Anzahl der Einzahler * 17,50 = 23512,50

Nun hatten wir doch schon den Fall, daß ein Betrag, der in eine Kasse eingezahlt war, unbekannt war!
Richtig, bei dem Schulfest! Und bei Sven Katzenpeter war es ähnlich!

Also, den bekannten Betrag herausnehmen durch **Umkehrung**!

Dann sieht unser Term so aus:

Anzahl der Einzahler * 17,50 = 23512,50 – 22753

Anzahl der Einzahler * 17,50 = 759,50

Wir wissen jetzt, wieviel in einer Reihe liegt, und was alle Reihen zusammen ergeben. Nur nicht die Anzahl der Reihen. Hatten wir doch auch schon!
Aha1 Wir können die 759,50 in Reihen zu je 17,70 **einteilen**, also ausrechnen, wieviel mal die 17,50 in den 759,50 **enthalten** sind.

Dann sieht unser Term so aus:

Anzahl der Einzahler = 759,50 : 17,70

Anzahl der Einzahler = 43

Damit ist dem guten Bernie geholfen.
Dir auch? Findest du solche Aufgaben besonders schwer?
Wenn nicht, kannst du ja meinen Lösungsweg für die nächste Aufgabe zudecken, erst mal selbst nach deinem eigenen suchen, und dann vergleichen.

5. 12) „Papi ist dreimal so alt wie ich!“ sagt Ilka zu ihrem Opa. „Wenn ich dein Alter und das deines Vaters zusammenzähle“, schmunzelt Opa, „dann kommt genau mein Alter heraus. Ich bin nämlich 56.“ Wie alt ist Ilka?
(Begabte Rechner haben vielleicht schon die Lösung)
Kurzfassung
Papi 3mal so alt wie Ilka / Zusammen 56

Ein Bild für Alter? Man kann es in Strichen darstellen. Wie wäre es da mit der Länge? Ausgefallene Idee: Stöße von Kalendern. Da hätten wir einen Stoß für Ilkas Jahre und drei Stöße für Papis Jahre, alle gleichgroß!
Damit können wir die Aufgabe eigentlich schon lösen. Aber geben wir uns doch die Mühe mit dem Term!

Ilkas Alter + Papis Alter = Opas Alter
Wie war das nun mit den gleichlangen Strichen oder den gleichgroßen Stößen?

Ilkas Alter + 3* Ilkas Alter = 56 (Wieviel mal ist Ilkas Alter da?)
4* Ilkas Alter = 56 (Auf jeden Stoß kommt ein gleichgroßer Anteil)
Ilkas Alter = 56 : 4 (Wie viele Kalender in einem Stoß?)
Ilkas Alter = 14

5. 13) Pauline hat ein Fahrrad gekauft. Mit dem Verkäufer hat sie sich auf Zahlung in Raten geeinigt. Nachdem sie bereits 11 mal die Rate einbezahlt hat, legt sie dem Verkäufer 214€ auf den Tisch, und der Preis von 819€ ist bezahlt.

Kurzfassung:
11 mal Rate/ 214€ zugezahlt/ 819€ bezahlt.

Hier können wir gleich von der Kurzfassung zum gelöcherten Term übergehen.
(Daß die einzelnen Raten eine Reihe aus gleichgroßen Beträgen bilden, müßte ich dir wohl nicht sagen.)

Term

11 * Rate + 214	=	819	(Auf zur ersten Umkehrung!)
11 * Rate	=	819 - 214	
11 * Rate	=	605	(Nächste Umkehrung!)
1 * Rate	=	605 : 11	
1 * Rate	=	55	

Na, selbst gelöst? Dann gratuliere ich dir ganz herzlich.

Gelesen und mitgekommen? Dann bist du auch schon recht weit.

Noch Schwierigkeiten? Kein Grund traurig zu sein! Für die fünfte Klasse ist das schon recht viel.

Stört dich das Reinschreiben in das Loch? Das werden wir uns ab jetzt ersparen. Für die fehlende Zahl setzen wir ab jetzt einfach x.

5. 14) Jenny hat 12€ mehr als Kassandra. Zusammen haben sie 42€. Wieviel € hat jede der Beiden?
Sieht schwer aus. Aber man kann diese Aufgabe auch ohne einen Term mit Loch lösen. Leider kann ich dich jetzt nicht fragen, was du am Liebsten zuerst machen würdest.

Kurzfassung
Jenny 12 mehr als Kassandra / zusammen 42 / wieviel jede?

Bemühen wir unsere Bilder:
Beide sitzen am Tisch. Jenny hat Geld vor sich liegen und Kassandra auch. Vielleicht haben beide eine Hand auf ihrem Geld liegen. Jenny protzt: „Guck, die 12€ habe ich mehr als du!“ Legen sie es zusammen, dann sind es 42€.
Was ich zählen kann, sind die 42€ und die 12€.
Gibt dir das eine Idee? Dann gehe ihr mal nach!
Wenn nicht, spielen wir ein wenig. Nehmen wir doch mal der aufgeblasenen Jenny die sichtbaren 12€ weg.
Das ist zwar gemein, aber wie ist die Situation nun?
Na, jetzt haben beide doch gleich viel!
Und wieviel ist das? Wie kamen die 42€ zusammen?
Bei dem, was beide gleichviel haben, liegen auch die 12€.
Aha, dann nehmen wir die 12€ auch von den 42€ weg.
Und was bleibt, ist das, was beide nun gleichviel zusammen haben!
Also hat eine die Hälfte davon!

Hat es bei dir gefunkt?
Wenn nicht, gehe die Bilder noch mal durch.

Zuerst sah es doch so aus, als wären zwei Löcher in dieser Aufgabe, nämlich das, was Jenny hat und das was Kassandra hat. Aber ohne die 12€ haben beide gleich viel. Und das, was also Kassandra auf dem Tisch liegen hat, ist das Loch in der Aufgabe!

Wenn wir nun für Kassandras Geld x setzen ……….
Dann hat Jenny doch ……….
Ja! x + 12!

Term in Worten;
Jennys Geld und Kassandras Geld zusammen 42

Term

x +12	+	x	=	42	(Alles klar? Dann nehmen wir weg)
x+12-12	+	x	=	42 -12	(Dann bleibt:)
x	+	x	=	30	(x ist **zwei mal** da!)
	2 * x		=	30	(Wir wollen aber wissen was 1*x ist)
	2*x :2		=	30 : 2	
	x		=	15	

Stimmt das auch? Machen wir die Probe:
Jennys Geld und Kassandras Geld zusammen 42

15 + 12	+	15	=	42
27	+	15	=	42
	42		=	42

Die Terme mit Löchern heißen Gleichungen, weil auf beiden Seiten des = eigentlich gleich viel steht. Man kann auch sagen, was rechts des = steht, ist das Ergebnis der Rechnung die links steht.

Diese Aufgabe geht weit über das hinaus, was du in der fünften Klasse können mußt. Also mußt du dich nicht grämen, wenn es noch nicht so hinhaut.
Wenn es dir aber schon Freude macht, um so besser.

Nehmen wir noch eine ähnliche Aufgabe.

5. 15) In Angelikas Klasse sind 35 Kinder. Die Anzahl der Jungen ist um 5 größer als die der Mädchen.
Hier fehlt die Zielfrage. Kannst du sie selbst stellen?
Vielleicht kannst du sogar den Term selbst aufstellen und die Lösung errechnen? Dann decke ab und leg los.

Mein Lösungsvorschlag:
Zielfrage: Wie viele Mädchen und Jungen sind in der Klasse?
Wenn wir für die Anzahl der Mädchen x setzen, dann ist die Anzahl der Jungen x+5.

Term:

x	+	x + 5	=	35	(Wenn Jungen und Mädchen gleichviel wären?)
x	+	x + 5 – 5	=	35 – 5	
x	+	x	=	30	(x ist zweimal da!)
	2 * x		=	30	(wieviel ist einmal x?)
	2 * x : 2		=	30 : 2	
	x		=	15	

Probe:
Mädchen Jungen
15 + 15 + 5 = 35 (Alles klar?)
15 + 20 = 35

Damit schließen wir dieses Kapitel vorerst einmal ab. Schließlich sollst du nicht gleich in der fünften Klasse deine Abiturprüfung ablegen!
Aber die Löcher im Term bleiben uns erhalten.

Zahlenrätsel

5. 16) Julia will ihren kleinen Bruder Max, den Rechenkünstler, ärgern.
„Ich nehme mir eine Zahl", sagt sie, „multipliziere sie mit 7, dann addiere ich 25 und erhalte 109. Das kriegst du nie raus, du Angeber!
Willst du mal alleine versuchen, dem beleidigten Max zu helfen?

Wir anderen beginnen mal mit der Kurzfassung. Hier kann man eine gekonnte Kurzfassung direkt in den Term „übersetzen".

Kurzfassung:
Unbekannte Zahl/ multipliziert mit 7/ 25 addiert/ erhalte 109

Term:
x * 7 +25 =109

Unser Term zeigt am Anfang eine Multiplikation. In jeder Reihe liegen 7, nur wie viele Reihen es sind, wissen wir nicht. (Hatten wir doch schon mal! Kannst du dir die Reihen vorstellen; Geldstücke, Knöpfe, Hamburger, Plätzchen oder einfach Punkte?)
Bevor wir aber die Operation, an die du jetzt sicher schon denkst, durchführen können, haben wir aber noch ein Hindernis zu beseitigen, denn die 109 sind nicht das Ergebnis von 7*x!
Denken wir an Jenny!
Alles klar, oder mal wieder zu viel erklärt?

x * 7 + 25 = 109
x * 7 +25-25 = 109 – 25
x * 7 = 84 (Umkehrung, wie viele Reihen sind es?)
x * 7 : 7 = 84 : 7 (Links kommen wir von x*7 auf 1* x, Bild klar?)
x = 12

5. 17) Jetzt ist Julia ärgerlich: „Wenn dir das zu leicht war, dann mache ich es dir mal richtig schwer. Paß auf! Diesmal addiere ich zu meiner unbekannten Zahl 25. Was da raus kommt, multipliziere ich mit 7. Das Ergebnis ist dann 199. Na, was jetzt, Herr Professor?
Suchen wir mal die besondere Schwierigkeit.

Kurzfassung:
Unbekannte Zahl / 25 addiert / mit 7 multipliziert / Ergebnis 199

Da ist es nicht schwer, auf den Term zu kommen. Wir müssen nur an die Regel Punkt vor Strich und an das Setzen von Klammern denken.

Term:
(x + 25) * 7 = 199

Halten wir hier einmal ein.
Kürzlich erlebte ich, wie ein Junge, der die achte Klasse einer Realschule besucht und die Regel zur Multiplikation mit Klammern auswendiggelernt hatte, nicht mehr weiter wußte, weil für ihn zum ersten mal die Zahl mit der multipliziert wurde, hinter der Klammer stand. Er kannte es bisher nur andersherum.
Bei einer Multiplikation kann man die Faktoren vertauschen. Stelle dir bitte eine ausgepackte Tafel Schokolade vor .Ich halte sie mit der schmalen Seite zur Tischplatte und sehe nun unten vier Rippen in einer Reihe. Nach oben schließen sich fünf weitere Reihen an. Da würde ich sagen, die Tafel enthält 6*4 Rippen. Halte ich nun die breite Seite zum Tisch würde ich eher sagen 4*6 Rippen. Größer oder kleiner wird die Tafel dadurch nicht. Das nennt man das Kommutativgesetz der Multiplikation.
Also können wir und den Term auch so denken:

7 * (x + 25) = 199

Hier können wir die Klammer nicht zuerst ausrechnen. Aber wenn Max zurückdenkt an den Getränkeeinkauf von Herrn Gastreich, dann wird er sich wohl zu helfen wissen.
Ob Preis und Pfand erst addiert wurden und dann mit der Zahl der gekauften Kästen multipliziert, oder erst multipliziert und dann addiert wurden, änderte nichts an den Kosten. Also dürfen wir rechnen:

7 * x + 7 * 25	= 199	
7 * x + 175	= 199	(wie es jetzt weitergeht, weißt du!)
7 * x + 175 – 175	= 199 – 175	
7 * x	= 14	(Wir wollen die Anzahl der Reihen)
7 * x : 7	= 14 : 7	
x	= 2	

5. 18) „Jetzt gebe ich dir mal was ganz Anderes“, faucht Julia. „Diesmal dividiere ich meine unbekannte Zahl durch 4 und subtrahiere vom Ergebnis 7. Dann bleibt 2 übrig. Wie heißt meine unbekannte Zahl?“
„Mit dem vierten Teil haben wir auch schon gerechnet“, äußert Max ungerührt.
Bist du auch so ruhig wie er? Fällt dir etwas ein? Willst du Term und Lösung erst selbst probieren? (Erinnerst du dich an Herrn Müller? Da war der vierte Teil seines Gehalts das, was auf einer der vier Tischecken lag! (Verteilt, ausgeteilt) Dividiert durch vier kann aber auch bedeuten, wie viel in einer Reihe liegt, wenn ich eine Menge in Viererreihen einteile.)

Kurzfassung:
Unbekannte Zahl durch 4 / 7 subtrahiert / 2 übrig

Term:
x : 4 - 7 = 2
Bild: Vom vierten Teil der Menge x werden noch sieben weggenommen, zwei bleiben übrig. Wenn ich nun wissen will, wie groß der vierte Teil wirklich ist? Aha! Was fehlt zurückgeben! Und wie ist es mit dem, was übrig blieb?

x : 4 - 7 + 7 = 2 +7
x : 4 = 9

Jetzt haben wir den vierten Teil von x. Wie kamen wir bei Herrn Müller auf das Ganze?

$4 * x : 4 = 9 * 4$

$x = 36$

Probe:
36 : 4 – 7 = 2
9 - 7 = 2

Vielleicht hast du die Aufgabe selbständig gelöst. Falls deine Schreibweise weniger kompliziert ausfiel als die meine, so ist das nicht weiter schlimm. Wichtig ist, daß du den richtigen Denkweg gefunden hast. Mit der Schreibweise bei Gleichungen werden wir uns in den folgenden Schuljahren noch eingehender beschäftigen müssen.
Versuche nun bitte, die folgenden Gleichungen selbständig zu lösen.

5. 19) Multipliziert man eine Zahl mit 14 und addiert 40, so erhält man 138.
Eine Zahl / mit 14 multipliziert / addiert 40 / man erhält 138

5. 20) Subtrahiert man von einer Zahl 23 und multipliziert das Ergebnis mit 15, so erhält man 165.

5. 21) Subtrahiert man 30 vom Fünffachen einer Zahl, so erhält man 65.

Lösungsvorschläge

5. 19) Kurzfassung:
Eine Zahl / mit 14 multipliziert / addiert 40 / man erhält 138

Term:

X	* 14	+ 40	=	138	(Was mehr ist, wegnehmen)
X	* 14	+ 40 – 40	=	138 – 40	
X	* 14		=	98	(Wir wollen 1 * x)
X	* 14 : 14		=	98 : 14	
X			=	7	

5. 20) Kurzfassung:
Von einer Zahl / 23 subtrahiert / Ergebnis mit 15 multipliziert / man erhält 165

Term:
(Achtung, 23 muß zuerst subtrahiert werden! „Ergebnis!“)

(x - 23) * 15	=	165	(Wie löst man die Klammer auf?)
15 * x - 15 * 23	=	165	
15 * x - 345	=	165	(165 ist um 345 weniger als 15*x)
15 * x - 345 +345	=	165 + 345	
15 * x	=	510	(Wir wissen, wieviel 15*x ist. Wir wollen 1 * x)
15* x : 15	=	510 : 15	
x	=	34	

5. 21) Kurzfassung
Vom Fünffachen / 30 subtrahiert / erhält 65

Term:

5 * x	- 30	=	65
5 * x	- 30 + 30	=	65 + 30
5 * x		=	95
5 * x : 5		=	95 : 5
5 * x		=	19

Wenn du diese Aufgaben verstanden hast, bist du schon ganz schön weit und brauchst dich nicht zu fürchten vor dem, was in den nächsten beiden Schuljahren auf dich zukommt.

Wenn die Löcher größer werden

Was soll denn das nun schon wieder?
Wer vom Anfang an ganz genau gelesen hat, könnte sich schon vorstellen, was jetzt kommt.

Wir anderen nutzen mal unser Vorwissen und denken ein wenig:

Wir kennen nun schon Terme mit Löchern.
Wir wissen auch, womit die jeweiligen Löcher in den Termen zu füllen waren.
Wenn wir uns also nun „größere Löcher“ vorstellen …

Ja, und wenn es nicht einfach größere Zahlen sind?

Eben! Dann sind es mehrere Zahlen!

Erinnerst du dich noch an die Aufgabe ganz am Anfang? Da hieß es doch: „Die weiteste Entfernung beträgt sieben Kilometer, die kürzeste drei.“
Gehen wir von ganzen Kilometern aus, dann wären 3, 4, 5, 6 und 7 Kilometer möglich.
Dann hieße die Lösungsmenge:

L = {3, 4, 5, 6, 7}

So sieht ein größeres Loch aus!

Daß Max das schon weiß, weiß wiederum Julia nicht:

5. 22) „Jetzt zeige ich dir mal deine Grenzen!“ zischt Julia. Wenn ich 12 zu meiner unbekannten Zahl addiere, erhalte ich weniger als 21. Und die Lösung will ich vollständig haben.“
„Bescheuert einfach“, grinst Max. „ „Ich nehme mal 12 von den 21 weg, dann habe ich 9. Alles was kleiner ist als neun gehört dann zur Lösungsmenge.
„Ich will aber einen Term sehen“, versucht Julia nun noch ein Mittel.

Können wir Max da helfen?
Wie schreibt man „weniger als“ oder „kleiner als“?
Wahrscheinlich kennst du diese Zeichen schon:
$>$und $<$

Stellen wir uns diese Zeichen als den aufgerissenen Rachen eines Krokodils vor. Ein stolzes Krokodil schnappt immer nach dem größeren Brocken. Dem kleineren streckt es verachtungsvoll den … na, den Hinterleib hin. Also:

$$100 > 10$$

Als Gleichung hättest du den Term sicher gleich gehabt. Mit dem Zeichen „größer“ oder „kleiner“ können wir nun die „Ungleichung“ ansetzen. Dieser Begriff trifft zu, weil eben links und rechts nicht das Gleiche steht.
Kurzfassung:
Zahl / 12 addiert / kleiner als 21

$$x + 12 < 21$$ (da wurden wieder 12 dazugelegt. Beide Seiten!)
$$x + 12 - 12 < 21 - 12$$
$$x < 9$$

„Und?“ fragt Julia, ist das jetzt schon Alles?“
„Du bist dran!“ gibt Max zurück.
„Ich? Wieso ich? Du sollst doch rechnen!“
„Aber du hast vergessen die Lösungsmenge anzugeben.“
„Ach so, na, weil du ein Fünftklässer bist, nur N.“

Max schreibt:
L = { 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1}

Mit „Grundmenge“ meinte Max, welche Zahlen zur Lösung zugelassen seien.
„N“ bezeichnet die Menge der „natürlichen Zahlen“ also 1, 2, 3, 4, 5, und so weiter.

Traust du dir selbst solche Aufgaben zu?

Bestimme in folgenden Aufgaben die Lösungsmenge.
Grundmenge N = { 1, 2, 3, 4, }

5. 23) Wenn man die Zahl mit 7 multipliziert, ist das Ergebnis immer kleiner als 40.
Term:
$$x * 7 < 40$$
Wenn du jetzt „mechanisch denkst vom Gleichungsrechnen her, also: Wir haben eine Multiplikation, da muß ich dividieren wenn ich 1*x will, begehst du zwar keinen grundsätzlichen Fehler, bringst dich aber in Schwierigkeiten, weil wir eine Ungleichung haben, und die natürlichen Zahlen als Grundmenge. Eine Division würde zu einer Kommazahl führen. Diese gehören nicht zu den natürlichen Zahlen. Wenn wir unsere Ungleichung in ein Bild umsetzen so steht links des Kleiner-Zeichens eine noch unbekannte Anzahl von Siebenerreihen, und die soll kleiner sein als 40. Vielleicht hat dir deine Einmaleinskenntnis die Lösungsmenge schon gezeigt. Wenn nicht, legen wir einfach eine Siebenerreihe auf die andere, bis keine mehr unter die 40 paßt. Dann stellen wir fest:
$$1 * 7 < 40$$
$$2 * 7 < 40$$
$$3 * 7 < 40$$
$$4 * 7 < 40$$
$$5 * 7 < 40$$
$$6 * 7 > 40$$

L = {1, 2, 3, 4, 5}

So kompliziert mußt du nicht schreiben. Es genügt mir, wenn du die Ungleichung so weit auflöst, bis die Lösung sichtbar wird, wie hier eben schon beim Term.
Mit deinen Kenntnissen vom Gleichungsrechnen kannst du die beiden folgenden Aufgaben so weit vereinfachen, bis die Lösungsmenge vorstellbar wird.

5. 24) Wenn man zum Vierfachen der Zahl 11 addiert, ist das Ergebnis kleiner als 20.

5. 25) Subtrahiert man vom Siebenfachen der Zahl 5 ist das Ergebnis kleiner als 30.

Lösungsvorschläge:

5. 24) Kurzfassung:
Zum Vierfachen / 11 addieren / Ergebnis kleiner 20
Term:

$$4 * x + 11 < 20$$
$$4 * x + 11 - 11 < 20 - 11$$
$$4 * x < 9$$

L = { 1, 2}

5. 25) Kurzfassung:
Vom Siebenfachen / 5 subtrahiert / Kleiner als 30

$$x * 7 - 5 < 30$$
$$x * 7 - 5 + 5 < 30 + 5$$
$$x * 7 < 35$$

L = { 1, 2, 3, 4}

Hast du bis hierher mitgehalten?
Dann alle Achtung meinerseits!
Ich hoffe, du wirst merken, wie dir das Denken in Bildern in der Schule hilft.