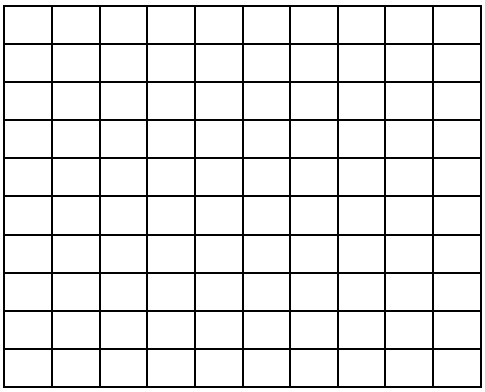
**Mathematik**
7. Schuljahr

I. Prozentrechnen

Du kennst Ganze und Teile vom Bruchrechnen her. „Prozent“ kann man auch mit „Hundertstel“ übersetzen.
Beim Prozentrechnen ist das Ganze immer $\frac{100}{100}$, also 100 Prozent und wenn beispielsweise von 17 Prozent (17%) die Rede ist, dann sind das $\frac{17}{100}$ vom Ganzen.
Eine Hilfe für deine Vorstellungskraft:



Du siehst hier ein Hunderterfeld auf dem Papier. Die Vorstellung, Menschen darauf zu verteilen oder auch Geld, dürfte schwierig sein.

Versetzen wir vor unserem inneren Auge dieses Hunderterfeld in die Realität. Stellen wir uns einen gefliesten Boden vor. Wir zählen zehn Fliesen in der Läge und in der Breite ab und umrahmen das entstandene Hunderterfeld mit Kreide. Nun könnten wir auf die Fließen große Summen Geldes gleichmäßig verteilen. Und andere Dinge ebenso: Z.B. Päckchen mit der Aufschrift Kilogramm oder Gramm (Bekommst du die Bilder hin?) oder auch Äpfel, Melonen und Erbsen.
Bodenfliesen sind zu klein, um Menschen darauf zu verteilen. Gehen wir ins Freie. Da stellen wir uns auf einem großen freien Platz zunächst ein Quadrat vor, einen Meter lang und einen Meter breit. Daneben legen wir noch neun weitere So entsteht eine Reihe aus zehn Quadraten. Legen wir noch neun Reihen dazu, so haben wir ein großes Hunderterfeld. Jedes Quadrat ist ein Hundertstel, also ein Prozent. Halte das Bild eine Weile vor deinem inneren Auge fest.

Grundaufgabe 1:

**7 1)Eine Schule hat 300 Schülerinnen und Schüler. 23 % davon treiben regelmäßig Sport. Wie viele Kinder sind das?**
Kurzfassung.
300 Schüler/ 23% davon Sportler/ Wie viele sind das?

Sehen wir nun die Schüler auf unser Hunderterfeld laufen wie auf ein Schachfeld auf einem Schulhof. Dann sollen sie sich gleichmäßig auf die Quadrate verteilen. Das heißt auf jedem Quadrat sollen gleich viele stehen. (Kommt deine Vorstellungskraft mit?)

Wie viele auf einem Quadrat stehen, sagt uns die Rechnung :100.
Also 300 : 100 = 3;  (: 100 sagt immer, wie viel auf einem Quadrat ist!)

© Friedrich Treber, 12/2024 Zur kostenfreien Weitergabe erlaubt

Ein Quadrat ist immer $\frac{1}{100}$ = 1%
23% sind dann 23 Quadrate. Wir sehen diese mit je drei Schülern darauf. Das Quadrat mit drei Schülern drauf ist 23 mal da. Also rechnen wir 23*3 = 69;
Es sind also 69 von den 300 Schülern, die Sport treiben.
Laß diese Aufgabe vor deinem inneren Auge zu einem Film werden, den du nie vergißt.
Die 300 Schüler sind das Ganze, der **Grundwert,** der auf das Hunderterfeld verteilt wird. 1% ist, was auf einem Hunderstelfeld steht oder liegt.23 % ist der **Prozentsatz**, der sagt, wie viele Hundertstel belegt sind. Die 69 Schüler, die auf den 23 Hundertstelquadraten stehen sind hier der **Prozentwert**. Dieser sagt also immer aus, was auf den vom Prozentsatz angegebenen Hundertsteln steht oder liegt.
Hinter jeder Prozentrechnung steht derselbe Ablauf. Natürlich ändern sich die Dinge, mit denen wir rechnen und wir fangen auch an verschiedenen Punkten an.
Es ist überflüssig, sich über die Rechnungsdarstellung zu ärgern, die der Lehrer verlangt, denn der zu Grunde liegende Gedankenweg ist jeweils derselbe: Vom Ganzen auf ein Hunderstel und dann auf so viele Hundertstel, wie es der Prozentsatz verlangt.
Das sieht als Dreisatz so aus:
100% entsprechen 300 Schüler
1% entspricht 300 : 100 = 3 Schüler (oder $\frac{300}{100}$)
23% entsprechen 23*3 = 69 Schüler (oder $\frac{300*23}{100}$)

Mit dem Operator $\frac{p}{100}$ so:
$300\overrightarrow{:100}\overrightarrow{23}69$

oder auch so:
$300\frac{\overrightarrow{23}}{100}69$

Und folgendermaßen als Tabelle:

| Operator | Schüler | Prozent | Operator |
|---|---|---|---|
| | 3000 | 100 | |
| : 100 | | | :100 |
| | 3 | 1 | |
| *23 | | | *23 |
| | 69 | 23 | |

Schau dir die verschiedenen Darstellungsweisen noch einmal an und lasse deine Bilder bitte mitlaufen.
Du wirst feststellen, daß es bei jeder Darstellung derselbe Gedankenweg ist.

Gehe denselben Bild - Gedankenweg mit Geld, Äpfeln, Zementsäcken oder auch Quadratmetern. (Z. B. 23% der Größe deines Schulhofes.)
Schwieriger wird die Vorstellung, wenn es sich um Längen in Metern oder Kilometern handelt. In diesem Fall kannst du dir die hundert Felder in einer Reihe vorstellen oder gleich die ganze Strecke in hundert Teile zerschnitten, dann eins davon und dieses danach dreiundzwanzigfach.

Nun bist du gerüstet für die zweite Grundaufgabe. Lies genau und setze um in das Bild vom Hunderterfeld. Wie sieht dein Bild von der Aufgabe aus? An welcher Stelle des Films sind wir da?

Grundaufgabe 2:
**7 2)Herr Bekdemir verkauft einen Teppich für 7500€. Das sind 60% des ursprünglichen Preises. Wie hoch war der ursprüngliche Preis?**

Kurzfassung:
7500 € sind 60% vom ursprl. Preis./ Wie hoch war der Preis?

Wenn du gut umgesetzt hast, siehst du sechs Reihen des Hunderterfeldes belegt mit Geld.
Das ist eigentlich das Ende des Films. (Wie die 23 Quadrate in der Schüler-Aufgabe)
Also gehen wir von da aus rückwärts auf ein Quadrat. Wenn auf 60 Quadraten 75000 € gleichmäßig verteilt sind, dann liegt auf einem Quadrat der sechzigste Teil oder$\frac{1}{60}$. Und auf dem ganzen Hunderterfeld eben hundert mal so viel! (Siehst du alles?)

Rechenwege:

60% ----------7500€

1% ----------7500€ : 60 = 125€ ($\frac{7500}{60}$)

100% ----------125€*100= 12500€ ($\frac{7500*100}{60}$)

7500€:$\overrightarrow{60}\overrightarrow{100}$12500€

7500 $\frac{\overrightarrow{100}}{60}$ 12500€

| Operator | Prozent | Preis | Operator |
|---|---|---|---|
| | 60 | 7500€ | |
| :60 | | | :60 |
| | 1 | 125€ | |
| *100 | | | *100 |
| | 100 | 12500€ | |

Grundaufgabe 3
**7. 3) Von den 300 in Aufgabe 7.1 erwähnten Schüler kommen 120 mit dem Bus zur Schule. Wieviel Prozent sind das?**

Kurzfassung:
300 Schüler/ 120 davon mit Bus/ Wieviel %?

Wenn du deine Vorstellung bemühst, so siehst du die 300 Schüler auf dem Hunderterfeld (Grundwert) und daneben ungeordnet die 120 Kinder die mit dem Bus kommen. Diese sind hier das Ende des Films, also der Endwert. Wir sehen aber nicht, wie viele Felder sie belegen.
Von den möglichen Lösungswegen will ich dir hier die drei gebräuchlichsten aufzeigen.
1. Lösungsweg
(Mit diesem Lösungsweg brauchst du dich nur dann zu beschäftigen, wenn er in der Schule ausdrücklich von dir verlangt wird.)

Nach den beiden bisherigen Grundaufgaben drängt sich das Bild oder der Gedanke von 1% auf. So gehen auch viele Rechenbücher vor. Also sehen wir wie gehabt 300 Schüler auf die hundert Quadrate verteilt. Dann stehen auf einem Quadrat drei.
Wie viele Quadrate werden dann von den 120 Fahrschülern gefüllt? Ich könnte nun immer drei dazu addieren bis ich bei 120 bin. Es geht aber auch kürzer: Ich ordne die 120 in Dreierreihen. (Kannst du dir das vorstellen?) Jede Dreierreihe füllt dann ein Quadrat. Rechnerisch ist das ein Beispiel für die Division als „Enthaltensein in".

Dreisatz:
100% ---------- 300 Schüler
1% ---------- 300:100 = 3 Schüler ($\frac{300}{100}$)
120 Schüler 120:3 = 40% (120 : $\frac{300}{100}$= $\frac{120*100}{300}$)

Das ist ein denkbarer Lösungsweg. Er ist aber nur sehr schwer in einer Tabelle darzustellen. Außerdem wollen viele Lehrer einen „sauberen" Dreisatz, bei dem immer das Gegebene links steht. Du wirst sehen, daß man dazu nur eine Frage anders stellen muß.

2. Lösungsweg
An dem Bild mit den 300 Schülern auf die 100 Prozentquadrate verteilt ändert sich nichts.
Bei dem schon erwähnten „sauberen" Dreisatz steht das Gefragte rechts. Und gefragt ist hier nach %. Dann müßte in der zweiten Zeile die Frage stehen: „1 Schüler entspricht wieviel %?"
Diese Frage können wir umformen, daß sie z. B. lautet: Wieviel % bekommt ein Schüler? Dann wird es zu einer Verteilungsaufgabe nach dem Beispiel 12 Äpfel werden an 4 Kinder verteilt. 12 : 4 =3; Das Ergebnis sagt also, wieviel jedes bekommt.
Wir sehen noch mal unseren Film. 100 Quadrate sind da. Dann kommen 300 Schüler und verteilen sich darauf. Wieviel Platz bekommt jeder? Wir sehen immer drei auf einem Quadrat. Also: 100%: 300 = $\frac{1}{3}$%; (oder 0,334) Hier hat das Bruchrechnen eindeutig Vorteile! Und du siehst, daß man die kleinere Zahl 100 durchaus durch die Größere Zahl 300 dividieren kann. (Jedes Prozentquadrat ist beliebig aufteilbar) So „bekommt" jeder der 300 Schüler $\frac{1}{3}$% Platz. Oder auch: er nimmt $\frac{1}{3}$% ein. Die 120 nehmen dann natürlich 120 mal so viel ein.
Das sieht als Dreisatz dann so aus:

300 Schüler ---------- 100%
1 Schüler ---------- 100% :3 0,33 % ($\frac{100}{300}$%)
120 Schüler ---------- 120* 0,33%39,.6% ($\frac{100*120}{300}$% = 40%)
Gehe noch einmal Zeile für Zeile durch und sehe deine Bilder dazu.

Wenn du bei den beiden bisher gezeigten Lösungswegen die Bruchrechnungen vergleichst stellst du fest, daß die verschiedenen Denkwege zu denselben Endformeln führen.
Der zweite Lösungsweg läßt sich auch leicht als Tabelle darstellen:

| Operator | Schüler | Prozent | Operator |
|---|---|---|---|
| | 300 | 100 | |
| :300 | | | :300 |
| | 1 | $\frac{1}{3}$ | |
| *120 | | | *120 |
| | 120 | 40 | |

Zur Pfeildarstellung lassen wir uns noch einmal den Film durch den Kopf gehen: Zuerst sehen wir das Hunderterfeld. Nun kommen 300 Schüler und jeder will Platz darauf. Natürlich jeder ebensoviel wie alle anderen. So kommen immer drei auf ein Prozentquadrat, also bekommt einer $\frac{1}{3}$%. 120 bekommen 120 mal so viel wie einer. Also.

$100 : \overrightarrow{300} \overrightarrow{120}$

$100 \frac{\overrightarrow{120}}{300}$

3. Lösungsweg
Hier ist etwas Bruchrechnen gefordert:
Das vorliegende Ganze sind 300 Schüler. Ein Teil des Ganzen, also ein Schüler, ist dann $\frac{1}{300}$. 120 Schüler sind dann $\frac{120}{300}$.
120 von 300 sind also $\frac{120}{300}$. Ich kann die 300 auf dem Schulhof sehen 120 davon tragen meinetwegen gelbe Mützen. (Du kannst sie in Deinem Bild kenntlich machen wie du willst.)
Das ist jetzt der Ausgangspunkt. Gefragt war, wie viel % die 120 Schüler seien. Prozent heißt, wie anfangs erwähnt, Hundertstel. Also müssen wir nur den Bruch mit dem Nenner 300 in einen Bruch mit dem Nenner 100 umwandeln. Zur Umwandlung von Brüchen haben wir Erweitern und Kürzen gelernt. Erinnerst du dich?
Wenn nicht: Die 300 Schüler sollen gleichmäßig auf das Hunderterfeld verteilt werden. Dadurch soll klar werden, wieviel Hundertstel-Quadrate die 120 einnehmen. Wir wissen ja schon, daß dann immer drei auf ein Quadrat gehen. Also werden die 300 und mit ihnen die 120 Schüler in Dreiergruppen eingeteilt. Der Operator hierzu ist :3 .
(Laufen beim Lesen deine Bilder schon mit? Wenn nicht, lies diesen Abschnitt noch einmal langsam, Satz für Satz, und gehe erst zum nächsten Satz weiter, wenn das Bild zum gelesenen Satz steht.)
Rechnerisch sieht das dann so aus:
$\frac{120:3}{300:3} = \frac{40}{100}$;

Da dies die schwerste Grundaufgabe ist, schlage ich vor, noch eine ähnliche Aufgabe durchzugehen.

**7. 4) Die Klasse 7b wird von 25 Schülern besucht. Sieben davon haben bei den Bundesjugendspielen eine Ehrenurkunde gewonnen. Wieviel Prozent der Klasse machen die Ehrenurkundengewinner aus?**
Kurzfassung:
25 Schüler / 7 davon Ehrenurkunde / Wieviel % ?

1. Lösungsweg
Die 25 Schüler sind die ganze Klasse. Sie füllen also auch das ganze Hunderterfeld. Wissen wollen wir, wie viele Hundertstel die sieben Schüler ausfüllen.
So schauen wir zuerst, wie viele auf ein Hunderstel kommen, bzw. wieviel Schüler ein Hunderstel bekommt. Dazu verteilen wir die 25 Schüler auf die hundert Quadrate. Klar, daß dann kein Quadrat einen ganzen Schüler abbekommt.
Wie viele Quadrate brauchen wir dann um sieben Schüler zusammenzusetzen, oder wie oft ist der Inhalt eines Quadrats in den sieben Schülern enthalten?

Rechnung:
100%----------25 Schüler
1%----------25:100=0,25 Schüler ($\frac{25}{100}$)
7 Schüler----------7:0,25%=28% ($7 : \frac{25}{100} = \frac{7*100}{25} = \frac{28}{1} = 28$)

2. Lösungsweg
Auch hier werden die 25 Schüler auf das ganze Hunderterfeld verteilt.
Die alles entscheidende Frage lautet aber: Wie viele Hundertstelquadrate nimmt ein Schüler ein? (Oder: bekommt ein Schüler?)
Dazu werden die 100 Quadrate an die 25 Schüler verteilt. Dann wissen wir viele Quadrate ein Schüler einnimmt.
Wenn ich nun einen Schüler nach dem anderen auf je vier Hundertstelquadraten stehen sehe, bis es sieben sind, habe ich ein schönes bildhaftes Beispiel für eine Multiplikationsaufgabe.

Dreisatz:
25 Schüler ----------100%
1Schüler ----------100% : 25=4% ($\frac{100}{25}$)
7Schüler ----------7*4%=28% ($\frac{100*7}{25}$)

Tabelle

| Operator | Schüler | Prozent | Operator |
|---|---|---|---|
| | 25 | 100 | |
| :25 | | | :25 |
| | 1 | 4 | |
| *7 | | | *7 |
| | 7 | 28 | |

Pfeildarstellung:
$100 \overrightarrow{:25} \overrightarrow{*7} 28$

3. Lösungsweg
Wenn du dich auf diesen Lösungsweg spezialisiert hast, siehst du am Besten die 25 Schüler, von denen sieben stolz ihre Urkunden hochhalten, neben dem Hunderterfeld stehen.
Dann soll aus den Schülern ein Bruch werden. 25 sind das ganze, einer $\frac{1}{25}$, sieben entsprechen demnach $\frac{7}{25}$ .Dann soll alles aufs Hunderterfeld verteilt werden, beziehungsweise der Bruch auf Hundertstel erweitert werden.

$$\frac{7}{25} = \frac{x}{100}$$
$$\frac{7*4}{25*4} = \frac{28}{100}$$

Wenn du jetzt gefragt wirst: „Prozentrechnen, was ist das, wie geht das?“ Was fällt dir dazu ein? Das „Schlüsselbild“ ist das leere Hunderterfeld. Von dem aus geht es dann leicht weiter zu den Grundaufgaben.

Bei der ersten ist das Feld ausgefüllt. Die Division durch 100 führt zu der Belegung eines Feldes, die Multiplikation dieser Belegung mit der Anzahl der gefragten Prozente ergibt, was sich auf dieser Anzahl Prozentquadrate befindet.
Die zweite Grundaufgabe gibt an, wie viel sich auf einer bestimmten Anzahl Hunderstelquadrate befindet. Der Lösungsweg führt über ein Hunderstel zu den hundert Hundertsteln.
Zur dritten Grundaufgabe kannst du dir entweder die gegebene Gesamtmenge auf das Hunderterfeld verteilt und die Teilmenge daneben vorstellen oder die Gesamtmenge mit der eingeschlossenen und gekennzeichneten Teilmenge neben dem leeren Hunderterfeld je nach dem Lösungsweg, für den du dich entschieden hast.
Wenn du Schwierigkeiten mit dem Vorstellen einer oder aller drei Grundaufgaben hast, dann arbeite bitte noch einmal nach.

Wenn es dir keine Schwierigkeiten mehr bereitet, Menschen, Geld, Gewichte oder Früchte auf dem Hunderterfeld oder den Hundertstelquadraten verteilt zu sehen, kannst du zu etwas mehr Abstraktion übergehen. Dann geht es nur noch um die belegten Felder oder Quadrate. Dabei stellen wir uns die belegten Quadrate dunkel und die freien Quadrate hell vor.
Das sieht bei der ersten Grundaufgabe so aus: Erst ist das ganze Feld dunkel, dann ein einziges Quadrat und danach so viele Quadrate, wie der Prozentsatz angibt.
Bei der zweiten sind zunächst die vom Prozentsatz angegebenen Quadrate dunkel. Das nächste bild zeigt ein Quadrat dunkel. Der Film endet mit dem ganz abgedunkelten Hunderterfeld.
Für die ersten beiden Lösungswege der dritten Grundaufgabe kannst du zunächst das von der Gesamtmenge abgedunkelte Hunderterfeld sehen und daneben die Teilmenge als gepunktete Kreise oder Quadrate, deren Teilbelegung des Hunderterfelds nun abgeklärt werden soll.
Den dritten Lösungsweg kann man als schematische Darstellung des Erweiterns und Kürzens sehen, wie du ihn wohl noch von der sechsten Klasse her kennst. Dazu stellst du den Ausgangsbruch zunächst in der Größe des Hunderterfeldes dar. Dazu wäre für die Aufgabe 7. 3) das Feld in dreihundert Teile aufgeteilt, so daß jedes Hunderstelquadrat in drei Teile zerschnitten ist. Ich stelle mir vor, dies geschieht durch Linien von rechts nach links, so daß aus jedem Hunderstelquadrat drei Dreihundertstel- Rechtecke werden. 120 davon wären markiert. Das Kürzen auf Hunderstel erfolgt nun, indem diese Linien verschwinden. Bei 7. 4) wäre anfangs das Feld in 25 Teile eingeteilt, deren jedes dann in vier Teile zerschnitten würde.
Du wirst selbst merken, wann du zu diesen schematisierten Bildern der Wirklichkeit übergehen kannst. Irgendwann wirst du wohl die Denkweise so gut beherrschen, daß dir die Zahlen genügen. Wenn Schwierigkeiten auftauchen, ist es immer gut, zur genauen Vorstellung zurückzugehen.

Übungen
Du kennst nun die drei Grundaufgaben der Prozentrechnung. Jetzt geht es darum, bei Textaufgaben, die du noch nicht kennst, zu erkennen, um welche Aufgabe es sich handelt. Dazu gebe ich dir zunächst drei Beispiele. Danach hast du Gelegenheit, selbständig mit Aufgaben umzugehen.
Beispiele

**7. 5) Im Jahr 1984 bekam Herr Swinouschka von seiner Autohaftpflicht 60 DM zurückerstattet. Das waren 15 % der 1983 gezahlten Beiträge. Wie viele DM an Beiträgen hatte Herr Swinouschka im Jahr 1983 gezahlt?**

Nach dem ersten Satz müßtest du 60 DM auf dem Tisch oder auf einer Überweisung sehen. Dann wird dir klar, daß diese die 15 % sind. Siehst du das auf dem Hunderterfeld?
Dein Bild-Denk-Weg für diese Aufgabe ist folgender:
Die 60 DM sind auf 15 Prozentquadrate verteilt. Über ein Quadrat komme ich auf die hundert.

**7. 6)Für das Schulfest wurden 500 Bratwürste besorgt. Davon wurden 450 verkauft. Wieviel Prozent sind das?**
Hier zeigt das Wort „davon“, daß die 500 Bratwürste das Ganze sind und die 450 ein Teil davon. Also dritte Grundaufgabe. (Du mußt dich nur mit dem Lösungsweg befassen, den du dir ausgewählt hast)
Für die Lösungswege eins und zwei sind am Anfang deines Bild-Denk-Weges die 500 Bratwürste auf das Hunderterfeld verteilt.
Bei 1. lauten nun die Fragen: Wie viele liegen auf einem Hundertstel? Wie oft ist der Inhalt eines Hundertstels in den 450 enthalten?
Bei 2. wird zuerst gefragt, wieviel Platz eine Wurst einnimmt und dann auf die 450
Für den dritten so.
500 Bratwürste sind das Ganze. Also heißt der Nenner 500 und der Zähler 450. Der Bruch soll in Hundertstel umgewandelt werden.

**7. 7) Eine Fahrschule hatte im letzten Jahr 400 Fahrschüler. 95 % davon bestanden die Fahrprüfung. Berechne bitte die Anzahl.**
Hier müßtest du die 400 Fahrschüler auf das Hunderterfeld strömen sehen. Wenn sie sich gleichmäßig verteilt haben, füllen die erfolgreichen Prüflinge 95 Hundertstelquadrate.
Der Bild-Denk-Weg dazu:
Die 400 füllen das Hunderterfeld. Über ein Hundertstelquadrat komme ich auf die 95%.

Übungsaufgaben
Schreibe nun bitte unter die folgenden Aufgaben deine Bild-Denk-Wege.

**7. 8) 20 000 Zuschauer besuchten einst ein Endrundenspiel des FKP. 5000 davon waren Jugendliche. Berechne bitte den Prozentsatz.**

**7. 9) Peter erzählt seinem Freund: „Mein Vater gibt mir 80€ für das neue Fahrrad dazu. Das sind immerhin 40% des Gesamtpreises.“ Wieviel kostet das neue Fahrrad?**

**7. 10 In einer Zeitungsnotiz ist zu lesen, daß die innere Talsperre Harz im Mai 16 000 000 Kubikmeter Wasser enthielt und damit zu 80% gefüllt war. Berechne bitte, wie viel Kubikmeter Wasser sie bei vollständiger Füllung enthält.**

**7. 11) Erbsen haben einen Eiweißgehalt von 21 Prozent. Wieviel Eiweiß ist in 750 Gramm Erbsen enthalten?**

**7. 12) Herr Akbakan hat einen Stundenlohn von 16,80€. Er erhält eine Lohnerhöhung von 0,504€. Wieviel Prozent seines Stundenlohnes macht die Lohnerhöhung aus?**

**7. 13) Beim Kartoffelschälen werden 11% des Gesamtgewichtes der Kartoffeln abgeschält. Wie viele Gramm sind das, wenn 1500 g geschält werden?**

**7. 14 Frau Schneider erhält beim Kauf eines Staubsaugers einen Rabatt von 8 Prozent. Das macht eine Verbilligung von 12,50 € aus. Wie hoch war der Preis für den Staubsauger?**

**7. 15) Ein Elektrogerätemarkt setzt den Preis für ein Fernsehgerät, das 720€ kostet um 144€ herunter. Um wieviel % ist das Gerät nun billiger?**

**7. 16) Durch das Räuchern verliert Schinken etwa 18 % seines Frischgewichtes. Wie schwer ist ein 8 kg schwerer Schinken dann nach dem Räuchern?**

Lösungen
7. 8)
1: Die 20000 füllen das Hunderterfeld. Wie viele sind auf einem Hundertstelquadrat? Wie oft ist diese Anzahl in 450 enthalten?
2. Die 20000 füllen das Hunderterfeld. Wieviel (Platz) von den hundert Quadraten bekommet einer? 5000 bekommen 5000 mal so viel.
3.: 20000 sind das Ganze. Also heißt der Nenner 20000 und der Zähler 5000. Der Bruch soll in Hundertstel umgewandelt werden.

7. 9) Die 80 € sind auf 40 Hundertstelquadrate verteilt. Über ein Quadrat komme ich auf die hundert .

7. 10) Die 16 000 000 Kubikmeter sind auf 80 Hundertstelquadrate verteilt. Über ein Quadrat komme ich auf die hundert.

7. 11) 750 Gramm sind auf das ganze Hunderterfeld verteilt. 21 Hunderstelquadrate enthalten Eiweiß. Über ein Hundertstelquadrat komme ich auf die 21.

7. 12
1. u. 2. Die 16,80€ füllen das Hunderterfeld.
1. Wie viele € enthält ein Hundertstelquadrat? Wie oft ist dieser Betrag in 0,54 € enthalten?
2. Wieviel Platz auf dem Hunderterfeld erhält 1€? 0,504 erhalten 0,504 mal so viel.
3. 16,80 € sind das ganze. Dann heißt der Nenner 16,80 und der Zähler 0,504. Der Bruch wird in Hundertstel umgewandelt.

7. 13) Wenn du die Aufgabe in einen Film umgesetzt hast, so siehst du zuerst die ungeschälten Kartoffeln auf das Hunderterfeld verteilt und dann auf 89 Quadraten geschälte Kartoffeln und während 11 Quadrate mit Schalen belegt sind.
In jedem Fall ist aber das Hunderterfeld mit 1500 Gramm gefüllt und über ein Hundertstel kommst du auf die 11Quadrate.

7. 14) Acht Hunderstelquadrate sind mit insgesamt 12,50€ belegt. Über ein Quadrat komme ich auf die hundert.

7. 15) Ich denke, du hast gleich erkannt, um welche Aufgabe es sich handelt, und dir gleich deinen Lösungsweg gesucht.
1. Die 720€ füllen das Hunderterfeld. Die Division durch 100 zeigt, wieviel auf ein Hunderstelquadrat kommt. Nun ist festzustellen, wie oft der Inhalt des einen Quadrats in den 144 enthalten ist.

2. Die 720€ füllen das Hunderterfeld. Wenn ich die 100 durch die 720 dividiere, erfahre ich, welchen Teil eines Hundertstelquadrates ein € einnimmt. 144€ nehmen 144 mal so viel ein.
3. 720 sind das Ganze. Also heißt der Nenner 720 und der Zähler 144. Dieser Bruch ist in einen Bruch mit dem Nenner 100 umzuwandeln.

7. 16) 8 Kilogramm Schinken füllen das Hunderterfeld. Auf einem Quadrat liegt der hundertste Teil der 8 Kilo. Auf 8 Hundertstelquadraten acht mal so viel.

Besonderheiten des Prozentrechnens

**7. 17)**
**Metzger Hasenfuß schlachtet ein Schwein von 152 kg Lebendgewicht. Der verwertbare Fleischanteil beträgt 21% weniger als das Lebendgewicht. Wieviel kg sind verwertbar? (Beachte die Frage und wähle den kürzesten Rechenweg!)**

Ohne den Zusatz wäre dies die erste Grundaufgabe. Man könnte die 21% in Kilogramm ausrechnen und von dem Lebendgewicht abziehen.
Der kürzeste Rechenweg wird dir mit der bildhaften Vorstellung klar: Du siehst auf einem Hunderterfeld 79 Quadrate mit Fleisch belegt und die restlichen 21 mit Knochen und weniger Appetitlichem. (Oder abstrakter: 79 Quadrate dunkel, 21 gepunktet oder gestrichelt) Also kannst du ja gleich die 79% ausrechnen und hast das gefragte Ergebnis ohne Umweg.
Mit einer genauen bildhaften Vorstellung sind solche Aufgaben kein Problem.

**7. 18) Alex kauft sich eine E-Gitarre für 240 €. 16% des Verkaufspreises kommen aber noch als Mehrwertssteuer hinzu.**

16% im Hunderterfeld wirst du dir ja sofort vorstellen können. So weit, so gut!
Aber diese 16% kommen ja zum Preis hinzu.
Klar, wir können 16% des Preisesausrechnen und addieren.
Geht es auch kürzer?
Überlege bitte: um den Inhalt der 16 Hundertstelquadrate wird der Preis größer.
Die 240€ füllen das Hunderterfeld. Der Inhalt von 16 Quadraten kommt noch hinzu!
Gibt das ein Bild? Versuche es bitte!
Na, klar! Da ist das Hunderterfeld und es kommen noch 16 Hundertstelquadrate dazu!

Wie muß ich dann rechnen?
Aha! Zuerst den Inhalt eines Hunderstelquadrates und dann diesen 116 mal!

Das sieht rechnerisch so aus:
$240 : \overrightarrow{100} \overrightarrow{116}$
$240 \frac{\overrightarrow{116}}{100}$
oder auch:
$240 \overrightarrow{1,16}$

An der folgenden Aufgabe kannst du deine Erkenntnisse noch einmal überprüfen. Laß zuvor bitte den Film von Aufgabe 7. 1) vor deinem inneren Auge ablaufen.

**7. 19)**
**a) Kevin bietet seine überflüssigen Yu-Gi-OH Karten bei e-**bay **an. Da nicht gleich viele Gebote kommen, senkt er seinen ursprünglichen Grundpreis um 20%. Jetzt sollen die Karten 1,60€ kosten. Wie hoch war der ursprüngliche Grundpreis?**

**b) Wenn er den bestehenden Grundpreis von 1,60€ um 20% anheben würde, wieviel würden die Karten dann kosten? (Wähle bitte den kürzesten Lösungsweg!)**

**c) Um wieviel Prozent müßte Kevin seinen Preis von 1,60€ erhöhen, damit die Karten wieder so viel kosteten wie vor der Herabsetzung des Preises?**
(Achte genau auf deine Bilder!)

Lösungswege zu 7. 19)
a) Der ursprüngliche Grundpreis steht am Anfang des Films. Er füllt das Hunderterfeld. Der Inhalt von 20 Hundertstelquadraten wurde weggenommen. Wie viele Hunderstel füllen dann die 1,60€? Aha! Dann geht der Weg weiter über ein Hunderstel zu den hundert Hundersteln.

b) Hier füllen die 1,60€ das Hunderterfeld. Der Inhalt von 20 Hundertstelfeldern kommt hinzu. (Siehe 7. 18)!)

c) Hier hast du das Ergebnis von Aufgabe a) als Grundwert. 1,60 ist der Prozentwert und du kannst nach dem Lösungsweg von den dreien vorgehen, für den du dich entschieden hast.

Zinsrechnen
*Jahreszins*
Zinsrechnung ist zunächst Prozentrechnung mit anderen Namen: Was bei der Prozentrechnung der Grundwert ist, nennt man bei der Zinsrechnung das Kapital. Kapital ist gespartes, ge - oder verliehenes Geld. Das Kapital ist das, wofür Zinsen gezahlt werden, und füllt immer das ganze Hunderterfeld.
Der Prozentsatz heißt beim Zinsrechnen Zinssatz und bezeichnet auch hier, wie viele Hundertstelquadrate als Teil des Kapitals gemeint sind. Was dann auf den Hundertstelquadraten liegt, die der Zinssatz angibt, heißt hier Zins statt Endwert.
Der nach dem Zinssatz berechnete Zins zählt immer für ein Jahr.
Mit diesem Wissen fällt es dir bestimmt leicht, folgende Aufgabe zu lösen.

**7. 20) Eugen hat 600€ auf ein Sparkonto eingezahlt. Wieviel Zins erhält er nach einem Jahr, wenn ihm die Bank 3% auf sein Guthaben gewährt?**
Lösungsweg:
Die 600€ füllen das Hunderterfeld. Die Division durch hundert zeigt, wieviel auf einem Hundertstelquadrat liegt. 3 Prozent sind dann dreimal so viel. Diesen Wert zahlt die Bank Eugen für ein Jahr.

*Wachstumsfaktor*

**7.21) Tanja legt 1500€ fest in einem Sparvertrag für 4 Jahre an. Sie erhält einen Jahreszins von 5%. Auf welchen Betrag ist Tanjas Konto nach vier Jahren angewachsen? (Wähle den kürzesten Rechenweg.)**

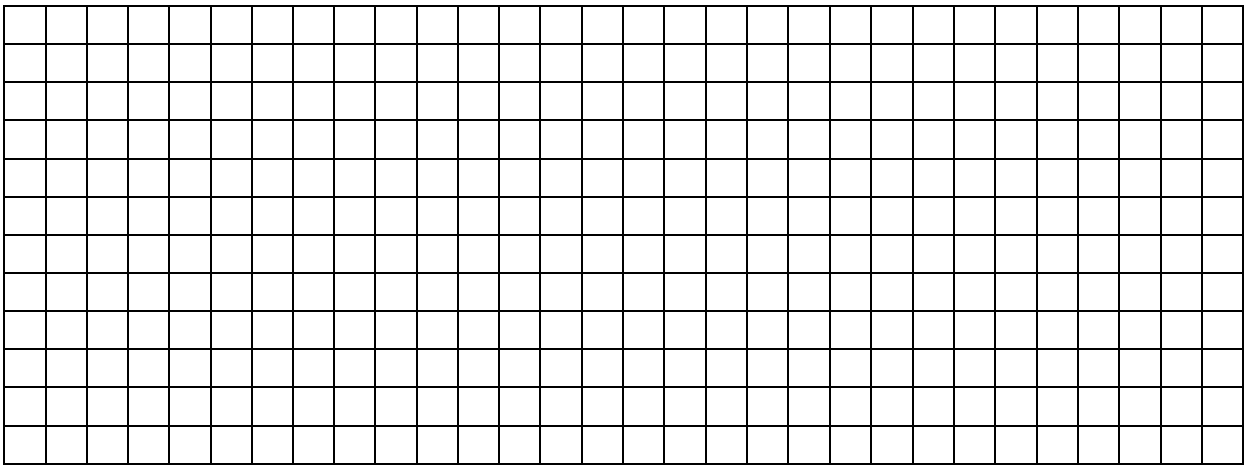
Lösungsweg
Das mit dem kürzesten Rechenweg kennen wir doch schon, oder?
Da ist das Bild mit den fünf Hundertstelquadraten, die dazu kommen. Also sind es dann $\frac{105}{100}$. Diese kann man errechnen, indem man mit 1,05 multipliziert. Dann hat man Kapital plus Zinsen am Ende eines Jahres. Mit diesem Betrag fängt das nächste Jahr an. Also ist er dann 100% gleichzusetzen.

Rechnerisch sieht das dann so aus:

1500€ $\overrightarrow{1{,}05}$ 1575€
1575€ $\overrightarrow{1{,}05}$ 1653,75€
1653,75€ $\overrightarrow{1{,}05}$ 1736,4375€
1736,4375€ $\overrightarrow{1{,}05}$ 1823,259375€

Um runde 323, 26€ ist Tanjas Kapital also angewachsen.

*Monats- und Tageszinsen*
Die vier Grundaufgaben
Geld wird nicht immer für ein oder mehrere volle Jahre entliehen. Aber auch jeder einzelne Tag zählt. Das Zinsjahr wird in 360 Tage eingeteilt. So kommen auf jeden Monat 30 Tage. Dadurch wird das Rechnen erleichtert. Vorstellen kannst du dir das Zinsjahr folgendermaßen:



Du siehst 12 Zeilen (Monate) mit je 30 Quadraten (Tagen) Inhalt. Macht insgesamt 360 Tage.
Benutzen wir nun unser Bild beim Lösen einer Aufgabe:

**7. 22) Felix hat 72 Tage lang 630€ auf seinem Sparbuch. Wieviel Zinsen bekommt er bei einem Zinssatz von 3,5%?**

Kurzfassung.
72 Tg./630€/ Wieviel Zins bei 3,5%?
Wir werden diese Kurzfassung gleich noch ordnen. Und zwar nach dem Lösungsfilm zu dieser Aufgabe. Also erstellen wir erst mal den Film.
Was heißt „Zinssatz von 3,5“?
Wenn du dich erinnerst: Jahreszins!
Also brauchen wir erst den Jahreszins und müssen diesen erst auf die 360 Tage verteilen, bevor wir dann sehen können, wie viel auf 72 Tage zu liegen kommt.
Da die Berechnung des Jahreszinses eine reine Prozentrechnung ist, sieht unsere geordnete Kurzfassung folgendermaßen aus:
(Kapital) 630€/ 3,5% (Jahres)Zins/ 72 Tage/ Zins?

Die 630€ füllen das Hunderterfeld. Die Division durch 100 zeigt uns, wie viele € auf einem Hunderstelquadrat liegen. Auf 3,5 Quadraten liegen 3,5 mal so viel.
Das ist dann der Jahreszins, den wir auf die 360 Tage verteilen. Hier führt die Division durch 360 zu dem Inhalt eines Tagesquadrates. Auf 72 Quadraten liegt 72 mal so viel.

Rechenwege

100% ----------630€
1% ----------630€:100=6,30€ ($\frac{630}{100}$€)
3,5% ----------6,30€*3,5=22,5€ ($\frac{630*3,5}{100}$€)
360Tg ----------22,5€ ($\frac{630*3,5}{100}$€)
1Tg ----------22,5€:360=0,0625€ ($\frac{630*3,5}{100*360}$€)
72Tg ----------0,0625€*72=4,5€ ($\frac{630*3,5*72}{100*360}$€)

| Operator | Prozent | € | Operator |
|---|---|---|---|
| | 100 | 630 | |
| :100 | | | :100 |
| | 1 | 6,30 | |
| *3,5 | | | *3,5 |
| | 3,5 | 22,5 | |
| | Tage | € | |
| | 360 | 22,5 | |
| :360 | | | :360 |
| | 1 | 0,0625 | |
| *72 | | | *72 |
| | 72 | 4,5 | |

Die Pfeildarstellung gibt den Film genau wieder:
630€:$\overrightarrow{100}$6,30€$\overrightarrow{3,5}$22, 5€:$\overrightarrow{360}$0,0625€$\overrightarrow{72}$4,5€

Gehe bitte den von dir ausgewählten Lösungsweg noch einmal Schritt für Schritt durch und stelle dir jeweils genau vor, was auf dem Hunderterfeld und der Jahresdarstellung geschieht. Dann versuche, den Film auch ohne Vorlage zu sehen. Benutze die Vorlage, wenn der Film nicht

weiterläuft. Übe bitte, bis du den ganzen Film ohne Vorlage ablaufen lassen kannst. Das mag anstrengend sein, aber es wird dir helfen, bei anderen Aufgaben herauszufinden, was fehlt.

**7. 23) Fatty kann eine Rechnung erst in 72 Tagen bezahlen. Der Händler brummt: "Gut, ich verlange nur 5% Zins. Dann bezahlst du mir also für die 72 Tage 3,60€ dazu." Wie hoch war die Rechnung?**

Kurzfassung:
72 Tg / 5% Zins/ 3,60€ dazugezahlt/ Rechnung?

Setzen wir nun in Bilder um und vergleichen mit 7. 22)!
72 Tage, das sind 72 belegte Quadrate von den 360 auf der Jahresdarstellung.
5% Zins, das sind fünf belegte Quadrate auf dem Hunderterfeld.
3,60€ zugezahlt, das ist der Zins, also das was auf den 72 Tagesquadraten verteilt ist. Und was in 7. 22) erst errechnet werden mußte.
Dafür fehlt das gefüllte Hunderterfeld am Anfang. Aha, das ist der Betrag, für den Zinsen gezahlt werden, also die Rechnung.
Das Hunderterfeld ist zunächst leer. So können wir auch nicht wissen, wieviel auf einem Hunderstelquadrat liegt. Aber fünf Felder sind danach belegt. Nur weiß man noch nicht, was darauf liegt.
Somit ist auch das Dreihundertsechzigerfeld nicht voll zu belegen. Wieviel Tagesquadrate sind belegt? Wie viel liegt insgesamt darauf?
Sieh dir den ganzen Film noch einmal an und laß dann den Schluß stehen. Wenn deine Bilder stark sind, kannst du jetzt selbst den Lösungsweg finden. Ein Tip noch dazu: Der Film läuft rückwärts! Nimm dir Zeit!

Na, hast du es geschafft? Wenn nicht, dann gehen wir jetzt gemeinsam den Lösungsfilm durch.
Also, 72 der 360 Quadrate waren belegt. Auf diesen 72 Quadraten waren 3,60€ gleichmäßig verteilt.
Wie bekommen wir heraus, was dann auf einem Feld lag? Auf den 360?
Was du bis dahin errechnet hast, füllt fünf Hundertstelquadrate. Wie man von da aus auf die Füllung des ganzen Hunderterfeldes kommt, haben wir schon oft geübt.
Wenn du das selbst herausgefunden hast, dann gratuliere ich dir herzlich. Wenn nicht, warst du vielleicht nahe dran und kannst es wohl beim nächsten Mal schon schaffen.

Rechenwege

72Tg ---------- 3,60€
1Tg ---------- 3,60€:72=0,05€ $(\frac{3,60}{72})$
360Tg ----------0,05€*360=18€ $(\frac{3,60*360}{72})$
5% ----------18€ $(\frac{3,60*360}{72})$
1% ----------18€ : 5 = 3,60€ $(\frac{3,60*360}{72*5})$
100% ----------3,60€*100=360€ $(\frac{3,60*360*100}{72*5})$

| Operator | Tage | € | Operator |
|---|---|---|---|
| | 72 | 3,60 | |
| :72 | | | :72 |
| | 1 | 0,05 | |
| *360 | | | *360 |
| | 360 | 18 | |
| | Prozent | € | |
| | 5 | 18 | |
| :5 | | | :5 |
| | 1 | 3,60 | |
| *100 | | | *100 |
| | 100 | 360 | |

Das Pfeildiagramm stellen wir zunächst nach dem Film 7. 22) auf. Dabei sehen wir, was fehlt. Fehlende Stellen durch „Rückwärtsrechnen“ zu erschließen, ist nicht schwer, wenn man weiß, wo man im Film ist, und wo man hinwill. Bin ich z.B. auf einem Tag, ist es nicht schwer, auf das ganze Jahr zu kommen!

$?\ :\overrightarrow{100}\ ?\ \vec{5}\ ?\ :\overrightarrow{360}\ ?\ \overrightarrow{72}3{,}60€$

$360€\overrightarrow{100}3{,}60€:\vec{5}18€\overrightarrow{360}0{,}05€:\overrightarrow{72}3{,}60$

Bei der nächsten Aufgabe lassen wir mal die Frage weg. Wenn du sie in Bilder umsetzt und mit deinem Film von Aufgabe 7. 22) vergleichst, wirst du sehen was fehlt und kannst selbst auf den Lösungsweg kommen.

**7. 24) Her Traubenrest hat sein Konto um 720 € überzogen. Der Überziehungszins beträgt 9%. Die Bank verlangt 7,38€ Zins.**
Kurzfassung.
Um 720€ überzogen/ 9% Überziehungszins/ 7,38€ Zins

Aha, für die 720€ müssen die Zinsen gezahlt werden. Also sind die 720€ das Kapital und füllen das Hunderterfeld. Dann sehen wir ein Hundertstelquadrat belegt und danach neun. Was auf den neun Hundertstelquadraten liegt, wird nun auf die 360 Tagesquadrate verteilt.
Bis hierher ist alles noch so, wie bei Aufgabe 7. 22). Auf allen 360 Quadraten liegen Cent-Münzen. Wie geht es bei 7. 22) weiter? – Erst ein Quadrat, dann 72 Quadrate und das Geld auf diesen. Was fehlt bei 7. 24)? – Die Anzahl der Quadrate, also die Zinstage!
Wir sehen also das vollbelegte Dreihundertsechzigerfeld und daneben die 7,38€. Das erinnert an die dritte Grundaufgabe des Prozentrechnens: Wenn wir wissen, wieviel Platz ein Euro einnimmt, dann nehmen 7,38€ 7,38 mal so viel ein!

Rechenwege:
100% ----------720€
1% ----------720€:100= 7,20€ $(\frac{720}{100})$
9% ----------7,20€*9=64,80€ $(\frac{720*9}{100})$

64,80€ ----------360Tg
1€ ----------360Tg:64,805,56Tg $(360:\frac{720*9}{100}=\frac{360*100}{720*9})$
7,38€ ----------5,56Tg*7,3841,0328Tg $(\frac{360*100*7{,}38}{720*9}=41)$

| Operator | Prozent | € | Operator |
|---|---|---|---|
| | 100 | 720 | |
| :100 | | | :100 |
| | 1 | 7,20 | |
| *9 | | | *9 |
| | 9 | 64,80 | |
| | Tage | € | |
| | 360 | 64,80 | |
| :64,80 | | | :64,80 |
| | 5,56 | 1 | |
| *7,38 | | | *7,38 |
| | 41,0328 | 7,38 | |

$72 = €:\overrightarrow{100}7{,}20€\vec{9}64{,}80€:\overrightarrow{360}0{,}18€\overrightarrow{*?}7{,}38€$

$7{,}38:\overrightarrow{018}41(\text{Tg})$

(41 Tagesquadrate müssen mit je 0,18E belegt werden, um 7,38€ zu erhalten!)

**7. 25) Ein Konto wird 36 Tage lang um 420 € überzogen. Für diesen Überziehungskredit berechnet die Bank 4,62€ Zinsen.**

Kurzfassung:
36 Tage/ 420€ überzogen/ 4,62€ Zins
Was siehst du im Vergleich zu 7. 22)?
420€ füllen das Hunderterfeld. Wir können uns zwar vorstellen und ausrechnen, wie viel auf einem Hundertstelquadrat liegt, aber es ist nicht gesagt, wie viele Hundertstelquadrate belegt sind. Es fehlt also, wie viel % (Jahres-) Zins verlangt werden. Darum ist auch nicht das ganze Dreihundertsechzigerfeld gefüllt, sondern nur 36 Dreihundertsechzigstelquadrate, auf denen 4,62€ verteilt sind.
Steht dein Bild?
Dann nimm dir Zeit und versuche erst mal selbst, einen Lösungsfilm zu finden.

Nun, so geht es: Über einen Tag($\frac{1}{360}$) kommen wir auf die 360 Tage, den Jahreszins. Dieser liegt nun neben dem mit den 420€ gefüllten Hunderterfeld und wir fragen uns, wie viele Quadrate nimmt der Jahreszins ein. Das ist die dritte Prozentaufgabe!

Rechenwege:
36Tg ---------- 4,62€
1Tg ---------- 4,62€:360,128€ ($\frac{4{,}62}{36}$)
360Tg ---------- 0,128€*36046,2€ ($\frac{4{,}62*360}{36}$=46,2)

420€ ---------- 100%
1€ ---------- 100%:4200,238% ($\frac{100}{420}$)
46,2€ ---------- 0,238%*46,211% ($\frac{100*46{,}2}{420} = \frac{100*7{,}7}{70} = \frac{770}{70}$=11)

| Operator | Tage | € | Operator |
|---|---|---|---|
| | 36 | 4,62 | |
| :36 | | | :36 |
| | 1 | 1,28 | |
| *360 | | | *360 |
| | 360 | 46,2 | |
| | Prozent | € | |
| | 100 | 420 | |
| :420 | | | :420 |
| | 0,238 | 1 | |
| *46,2 | | | *46,2 |
| | 11 | 46,2 | |

420€:$\overrightarrow{100}$4,20€*$\overrightarrow{?}$? :$\overrightarrow{360}$? $\overrightarrow{36}$4,62€
420€:$\overrightarrow{100}$4,20€*$\overrightarrow{?}$46, 2€$\overrightarrow{360}$0,128€:$\overrightarrow{36}$4,62
46, 2:$\overrightarrow{4,20}$11(%)
(11 Quadrate müssen mit je 4,20€ gefüllt werden, um 46,20€ zu erhalten!)

Vom Bild zur Zinsformel
Auswendiggelernte Formeln bringt man unter Druck, wie z.B. bei Klassenarbeiten, leicht durcheinander. Wenn man aber seine Bilder hat, kann man darnach die Formel leicht selbst wieder aufbauen, oder auch überprüfen, ob man die richtige Formel dastehen hat.
Nehmen wir unseren Film der Aufgabe 7. 22):
Da füllte am Anfang das Kapital (Gekürzt K) das Hunderterfeld. Die Division durch hundert zeigte, wie viel auf einem Feld lag. Der Prozentssatz oder Zinssatz (gekürzt p) sagte, auf wie vielen Hundertstelquadraten der Jahreszins lag. Dieser wird auf das Dreihundertsechzigerfeld verteilt. Die Division durch 360 ermittelte den Inhalt eines Quadrats, also den Zins für einen Tag. Multipliziert mit der Anzahl der Zinstage (Gekürzt t) ergab sich daraus der gesuchte Zins (Gekürzt Z).
(Beim Aufstellen von Formeln genügt die abstraktere Vorstellung. Man braucht nur gefüllte Felder oder Quadrate dunkel und leere hell zu sehen)
Formel für Zins
Gegeben: K, p, t  gesucht Z

| Gesucht | Rechnung | errechnet | Bild |
|---|---|---|---|
| Z | $\frac{K}{100}$ | 1 % | Inhalt eines Hundertstelquadrats |
| Z | $\frac{K * p}{100}$ | Jahreszins | Inhalt von p Hunderstelquadraten |
| Z | $\frac{K * p}{100 * 360}$ | Zins für einen Tag | Inhalt eines Quadrats von den 360 |
| Z= | $\frac{K * p * t}{100 * 360}$ | Zins für die angegebenen Zinstage | Inhalt so vieler Quadrate wie Zinstage angegeben |

Für die Aufgabe 7. 22) sähe das so aus:
Gegeben: K = 630€, p = 3,5%, t = 72Tg;  Gesucht Z

$Z=\frac{K*p*t}{100*360}$
$Z=\frac{630*3,5*72}{100*360}$
Gehe die Formel bitte noch einmal Schritt für Schritt durch und sehe dabei deine Bilder. Je stärker deine Bilder, desto höher deine Sicherheit. Um so geringer wird damit auch deine Anfälligkeit für Fehler.

Formel für Kapital
Gegeben: Z, p, t  gesucht: K
Hier ist das Hunderterfeld leer. Es ist angegeben, daß einige Hundertstelquadrate belegt sind. Wegen der fehlenden Gesamtbelegung können wir aber nicht ausrechnen, wieviel auf einem Quadrat liegt und darum auch nicht den Jahreszins. So bleibt nur eine Anzahl von Tagen belegt und es ist gesagt, wieviel darauf liegt. Also müssen wir hier den Lösungsweg von hinten nach vorn gehen. Hast du schon eine eigene Vorstellung?
Der Zins ist für eine bestimmte Anzahl von Tagen, ist also auf diese Anzahl von Dreihundertsechzigstelquadraten verteilt. Dividieren wir den Zins durch die Anzahl dieser Tage, so haben wir den Inhalt eines Tagesquadrats. Diesen multipliziert mit 360 ergibt den Jahreszins und damit den Inhalt der unter p angegebenen Hundertstelquadrate. Von da auf den Inhalt des ganzen Hunderterfeldes zu kommen, ist eine einfache Prozentrechnung.

| Gesucht | Rechnung | Errechnet | Bild |
|---|---|---|---|
| K | $\frac{Z}{t}$ | Zins für einen Tag | $\frac{1}{360}$ belegt |
| K | $\frac{Z*360}{t}$ | Jahreszins | Ganzes Jahr ausgefüllt und die für p stehende Anzahl Hundertstelquadrate |
| K | $\frac{Z*360}{t*p}$ | 1% des Kapitals | Ein Hunderstelquadrat belegt |
| K= | $\frac{Z*360*100}{t*p}$ | 100% des Kapitals | Hunderterfeld gefüllt |

Für die Aufgage 7. 23) sähe das so aus:
Gegeben: p =5%, t = 72Tg, Z =3,60€,  Gesucht. K

$K=\frac{Z*360*100}{t*p}$
$K=\frac{3,60*360*100}{72*5}$

Formel für Zinszeit

Gegeben K, p, Z;  Gesucht: t
Das Kapital füllt das Hunderterfeld. Von da ist es leicht auf ein Hundertstel zu kommen. p sagt, wie viele Hundertstelquadrate durch den Jahreszins belegt sind. Der Jahreszins füllt die 360 Tage aus. Dividieren wir durch 360, dann ist nur noch ein Quadrat dunkel.

Neben dem Feld liegt Z, eine Anzahl von Münzen oder Scheinen. Wie bekommen wir nun heraus, wie viele Tagequadrate, die für Z angegebenen Scheine oder Münzen füllen?
Wir wissen ja, wieviel auf ein Quadrat kommt. Also legen wir so viel auf ein Feld nach dem anderen, bis Z aufgebraucht ist. Nach jedem belegten Quadrat müßten wir dann den Inhalt von Z abziehen. Aber du weißt, daß das auch kürzer geht, nämlich durch Dividieren als „Enthaltensein in."

| Gesucht | Rechnung | Errechnet | Bild |
|---|---|---|---|
| t | $\frac{K}{100}$ | 1% | Ein Hundertstel ist dunkel |
| t | $\frac{K * p}{100}$ | Jahreszins | Die für p angegebene Anzahl von Quadraten ist dunkel |
| t | $\frac{K * p}{100 * 360}$ | Zins für einen Tag | Eins der 360 Quadrate ist dunkel |
| t= | $Z:\frac{K*p}{100*360}=\frac{Z*100*360}{K*p}$ | Zinstage | Z ist auf so viele Quadrate verteilt, wieviel mal es den Inhalt eines Quadrates enthält |

(Wenn du in der letzten Zeile Schwierigkeiten hast, dann beschäftige dich mal mit Bruchrechnen.)

Für Aufgabe 7. 24) sähe das so aus:
Gegeben: K=720€, p=9%, Z=7,38€;  Gesucht: t

$t=\frac{Z*100*360}{K*p}$
$t=\frac{7{,}38*100*360}{720*9}$

Formel für Zinssatz

Gegeben: K, z, t  Gesucht p

Für eine bestimmte Anzahl von Tagen wurde ein bestimmter Zins (Z) gezahlt. Auf der Darstellung für die Zinszeit können wir uns die Zinstage (t) eingefärbt vorstellen. Wenn wir nun den Zins durch die Anzahl der Zinstage dividieren erhalten wir den Zins für einen Tag. Dieser mit 360 multipliziert ergibt den Jahreszins.
Das Kapital(K) füllt das Hunderterfeld. Der Jahreszins liegt daneben, und wir fragen uns, wie viele Hundertstel des Kapitals im Jahreszins enthalten sind. Das haben wir schon herausgefunden, indem wir den Jahreszins durch 1% des Kapitals dividiert haben.
1% des Kapitals = $\frac{K}{100}$

Dividiert durch 1% des Kapitals heißt dann * $\frac{100}{K}$ (Bruchrechnen)
Nach dieser Operation wissen wir, wie viele Hundertstelquadrate der Jahreszins auffüllt.

| Gesucht | Rechnung | Errechnet | Bild |
|---|---|---|---|
| p | $\frac{Z}{t}$ | Zins für 1 Tag | Ein Dreihundertsechzigstel dunkel |
| p | $\frac{Z * 360}{t}$ | Jahreszins | Alle Dreihundertsechzigstel dunkel |
| p | $\frac{K}{100}$ | 1% des Kapitals | Ein Hundertstelquadrat dunkel |
| p | $\frac{Z * 360 * 100}{t * K}$ | Zinssatz | Vom Zinssatz gefüllte Hundertstelquadrate dunkel |

Für die Aufgabe 7. 25) sähe das dann so aus:

$\frac{Z*360*100}{t*K} =$

$$\frac{4{,}62 * 360 * 100}{36 * 420}$$

Übungsaufgaben

**7. 26) Sarah hat 5 Monate lang 240€ auf ihrem Sparbuch. Der Zinssatz beträgt 3,5 %. Wieviel Zinsen bekommt sie?**

**7. 27) Domenico kann eine Reparatur an seiner Harley, die 1250€ kostet, erst nach 18 Tagen begleichen. Die Werkstatt verlangt 13,75 € Zinsen.**

**7. 28) Ein Kredit über 5000 € soll jeden Monat 55 € Zinsen kosten. Welchem Zinssatz entspricht das?**

**7.29 Für 1440 € Kredit werden bei einer Verzinsung von 7% 7,56 € Zins bezahlt. Berechne bitte die Zinstage**

**7. 30) Ein Hausbesitzer versäumt es, eine Handwerkerrechnung in Höhe von 7500€ innerhalb der vereinbarten Zahlungsfrist zu begleichen. Vier Monate nach Ablauf der Frist geht ihm eine Mahnung über 7750€ zu. Wieviel Prozent Zins hat der Handwerker verlangt?**

**7. 31) Elena hat von ihrer Oma Geld geerbt. Sie legt es zu einem Zinssatz von 6% an. Nach 90 Tagen erhält sie 432€ Zinsen. Wieviel Geld hat ihr Oma hinterlassen?**

**7. 32) Wie lange dauert es bis Fatihas Sparguthaben von 480€ auf 500€ angewachsen ist, wenn der Zinnssatz 5% beträgt?**

7. 26) Die 240€ sind auf das ganze Hunderterfeld verteilt. Die Division durch Hundert führt zum Inhalt eines Hundertstels. Die Multiplikation mit 3,5 ergibt, wie viel auf dreieinhalb Quadraten liegt. Das wiederum ist der Jahreszins, der auf das ganze Dreihundertsechzigerfeld verteilt wird. Dieses hat für 12 Monate 12 Reihen. Also ergibt die Division durch 12 den Zins für einen Monat. Die Multiplikation mit 5 führt zum Endergebnis.

7. 27) Die 1250€ füllen das Hunderterfeld. Der Inhalt eines Quadrates kann errechnet werden. Dann fehlt aber die Anzahl der Quadrate, die den Jahreszins ausmachen. Auf der Darstellung des Zinsjahres sind die 13,75€ auf 18 Quadraten verteilt. Über ein Quadrat kommen wir auf den Jahreszins. Wie viele Quadrate des Hunderterfeldes können wir damit füllen?
1. Möglichkeit: Wieviel % nimmt ein Euro ein, wieviel dann der Jahreszins?
2. Möglichkeit. Wie oft ist der Inhalt eines Hundertstelquadrates im, Jahreszins enthalten?
3. Möglichkeit: Den Bruch von Jahreszins und Kapital auf Hunderstel umrechnen.

7. 28) Von einem Monat auf 12 Monate zu kommen, ist nicht schwer. Was wir dann errechnet haben, ist ein Teil der 5000€, die auf das Hunderterfeld verteilt sind. Also dritte Prozentaufgabe. Welche Lösung bevorzugst du?

7. 29) Der erste Teil ist ganz Leicht: 1440€ sind auf das Hunderterfeld verteilt. Ein Hundertstelquadrat errechnen und dann sieben. Dieser Jahreszins wird auf die 360 Tagequadrate verteilt. Die Frage ist, wie oft der Inhalt eines Tagesquadrats in den 7,56€ enthalten ist oder wie viele Tagesquadrate mit 7,56€ gefüllt werden können.

7. 30) Wenn deine Bilder stehen, siehst du die 7500€ auf das Hunderterfeld verteilt, während die 250€ vier der Zwölf Monatszeilen im Dreihundertsechzigerfeld belegen. Von da zum Jahreszins ist es nicht schwer. Wie viele Hunderstelquadrate belegt dieser?

7.31) Du siehst 90 Tage belegt, während das Hunderterfeld leer ist. Wenn der Inhalt der 360 Tage errechnet ist, belegt dieser sechs Quadrate des Hunderterfeldes. Über ein Quadrat kommen wir leicht auf die hundert.

7. 32) Das Hunderterfeld ist gefüllt, wir kommen leicht auf den Inhalt von fünf Quadraten und können diese auf die 360 Tagesquadrate verteilen. Wie viele Tagesquadrate müssen gefüllt sein, bis die 20€ erreicht sind?

<u>Zuordnungen</u>
*Schwierigkeitsgrad 1*

Man kann noch so viel über „proportional“ und „antiproportional“ lernen, wenn man Fehler vermeiden will, muß man jede Aufgabe für sich betrachten. Das heißt hier, sich ein entsprechendes Bild der Aufgabensituation zu entwerfen. Wenn das Bild steht, ist es leicht, zu entscheiden, welche Rechenoperation weiterführt. Wir werden das an der nächsten Aufgabe gleich feststellen.

**7. 33) Fünf Planierraupen räumen eine Mülldeponie in 20 Stunden.**
**a) Wenn nur vier Planierraupen da sind, wie lange dauert die Räumung dann?**
**b) Die Deponie muß in acht Stunden geräumt sein. Wie viele Planierraupen müssen eingesetzt werden?**
Kurzfassung:
5 Raupen räumen in 20 h/
a) wie lange brauchen 4R
b) wie viele Raupen räumen in 8 h?

Hast du ein Bild? Siehst du wie jede Raupe einen gleichgroßen Teil des Platzes räumt? Kannst du die Teile auch noch in Stunden einteilen?
Etwas abstrahiert, sähe das so aus:

| 1. Raupe | 2. Raupe | 3. Raupe | 4. Raupe | 5. Raupe |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

Jede Raupe hat ihr Feld (Spalte) und benötigt 20 Stundenleistungen (Zeilenabschnitte) dazu.
Wenn nun eine Raupe alles erledigen müßte? (Ihr Feld und das der anderen?)
Wenn man es sieht, ist doch klar: fünf mal je zwanzig Stunden. (So viele Raupenstundenleistungen werden benötigt.)
Und wenn nun vier Planierraupen dastehen?
Dann müßten wir doch das ganze Feld in vier Spalten einteilen! (Typische Divisionsaufgabe: 100 Stunden sind da, wie viele „bekommt“ eine Raupe?)
Alles klar?
Dann sieht das rechnerisch so aus:
7. 33a)
5 Raupen ……20Stunden
1 Raupe …… 5*20Stunden=100Stunden
4 Raupen ……. 100Stunden:4=25 Stunden ($\frac{5*20}{4}$= 25 Stunden)

Bei der Aufgabe b haben wir dasselbe Feld als Ausgangspunkt. Jeder Zeilenabschnitt ist eine Stundenleistung.
Egal ob 4 Raupen in 25 Stunden oder 5 in 20 Stunden, die Anzahl der zu leistenden Stunden bleibt gleich. Wenn es nun nur 8 Stunden dauern soll, erledigt jede Raupe eben acht Stundenleistungen und die nächste ebenfalls, bis die Hundert voll sind.
Wie würdest du dazu auf der Darstellung vorgehen?
Vielleicht immer acht Zeilenabschnitte einrahmen und dann schauen, wie viel mal die acht eingerahmten Stunden da sind?
Das wäre dann wieder ein typischer Fall für Dividieren als „Enthaltensein in“!

In einer Dreisatzaufgabe haben wir immer das Gefragte auf der rechten Seite stehen und gehen wie beim Prozentrechnen den Weg über Eins. Unser Bild zeigt, ob wir dividieren oder multiplizieren müssen
Das sieht dann für die Aufgabe b so aus:

25 Stunden …….4 Raupen
1 Stunde ……...4*25=100 Raupen (für jede Stundenleistung eine Raupe!)
8 Stunden ……. 100:8 = 12,5 (also 13) Raupen

Also braucht man 13 Raupen, wobei eine nur halbe Leistung bringen müßte.
Schau dir beide Lösungen noch einmal an und laß die Bilder mitlaufen.
Nun 7. 33) a und b in der Tabelle.

| Operator | Raupen | Stunden | Operator |
|---|---|---|---|
| | 5 | 20 | |
| :5 | | | *5 |
| | 1 | 100 | |
| *4 | | | :4 |
| | 4 | 25 | |
| *25 | | | :25 |
| | 100 | 1 | |
| :8 | | | *8 |
| | 12,5 | 8 | |

Gehe bitte diese Tabelle noch einmal durch. Achte genau auf die Vorzeichen der Operatoren. Weißt du genau warum * oder : steht? Welches Bild gehört jeweils dazu?
Wenn du Schwierigkeiten hast, dann sieh in den Erklärungen nach, bis du keine Zweifel mehr hast. Die obige Darstellung kann dir als Grundlage für die Vorstellung von Arbeitsabläufen dienen.

**7. 34) Der Besitzer einer Imbißbude hat in 12 Tagen 720 kg Kartoffeln zu Pommes frites verarbeitet.**
**a) Wieviel kg muß er für 7 Tage bereitstellen, wenn er jeden Tag gleichviel verkauft?**
**b) Er bringt 300 kg Kartoffeln vom Großmarkt mit. Wie lange reichen diese bei gleichem Verbrauch?**

Kurzfassung:
In 12 Tagen 720kg Kartoffeln verarbeitet
a) Wieviel kg für 7 Tage?
b) Wie lange reichen 300 kg?

a) Stellen wir uns mal einen großen Haufen Kartoffeln vor. Der reicht für 12 Tage. Wie kommen wir nun auf einen Tag? Postieren wir doch 12 Behälter in eine Reihe. (Nach Belieben große Säcke, Eimer, Kisten, meinetwegen Kasten, in die man hineinsehen kann, aus Latten oder Draht.) Wenn wir nun die Aufgabe in der Wirklichkeit lösen wollten ohne zu rechnen? – Immer eine Kartoffel in jeden Kasten, bis der Haufen weg ist. Damit haben wir doch das Grundmuster für dividieren! (Die Kartoffeln wurden verteilt!) Gehen wir in der Wirklichkeit weiter brauchten wir nun nur einen Kasten zu wiegen und das Gewicht mit 7 zu multiplizieren.

Das sieht dann so aus, daß wir die 720kg durch Division auf die 12 Behälter verteilen und so das Gewicht eines Behälters ermitteln. Durch die Multiplikation mit 7 ermitteln wir den Inhalt der 7 Behälter.

7. 34 a) Dreisatz:

12 Tage …….720kg
1 Tag ……...720kg : 12 =. 60kg
7 Tage ……60 kg *7 = 420kg

7. 34 b) Hier wiegt der Haufen nun 300 kg. Wir wissen ja, daß an einem tag 60kg verbraucht werden. Also fragen wir uns, wie oft die 60kg in 300kg enthalten sind. In der Wirklichkeit würden wir vielleicht immer wieder 60kg abwiegen, bis der Haufen weg ist. Rechnerisch teilen wir durch Division die 300kg in Sechziger ein.
Das scheint leicht. Aber manche Lehrer fordern auch bei jeder Teilaufgabe einen neuen Ansatz, der ohne Nutzung des bereits vorliegenden Ergebnisses erstellt werden muß. Na, dann: Gefragt sind hier die Tage, also stehen die im Dreisatz links. Daß ein Kilo Kartoffeln nur für den Bruchteil eines Tages reichen kann, ist klar. Folgen wir also der Rechenlogik.

720kg …… 12 Tage
1kg ……. $\frac{12}{720} = \frac{1}{60}$ (Die Tage werden auf die Kilo verteilt. 1kg reicht für $\frac{1}{60}$ eines Tages)
300kg ……. $\frac{1*300}{60} = 5$ (300kg reichen für 5 ganze Tage!)

34 a und b in der Tabelle

| Operator | Tage | Kilogramm | Operator |
|---|---|---|---|
| | 12 | 720 | |
| :12 | | | :12 |
| | 1 | 60 | |
| *7 | | | *7 |
| | 7 | | 420 |
| | 12 | 720 | |
| :720 | | | :720 |
| | $\frac{1}{60}$ | 1 | |
| *300 | | | *300 |
| | 5 | 300 | |

Gehe bitte auch diese Tabelle noch einmal durch und stelle dir bei jedem Operator vor, was geschieht.

Übungsaufgaben

Setze bitte folgende Aufgaben erst in Bilder dann in eine Dreisatzrechnung um.

**7. 35)Heike schafft mit ihrem Moped in 12 Minuten 8 Kilometer. Wie viele Minuten würde sie für 17 Kilometer brauchen?**

**7. 36) ein Ferienhaus kann von 9 Arbeitern in 16 Tagen fertiggestellt werden.**
**a) Es können nur 6 Arbeiter eingesetzt werden. In wie vielen Tagen wird das Haus fertig?**
**b) Wie viele Arbeiter müssen eingesetzt werden, wenn das Haus in 12 Tagen stehen soll?**

**7. 37) 5kg Kartoffeln kosten 4,50 €. Wieviel kosten 3kg dieser Sorte?**

**7. 38) ein Futtervorrat reicht für 10 Ferkelchen 30 Tage. Wie lange reicht derselbe Futtervorrat für 15 Ferkelchen bei gleichgroßen Rationen?**

**7. 39) 12 Eier wiegen 780g. Wieviel wiegen 30 Eier der gleichen Sorte?**

**7. 40) Sven Swinouschka soll Ziegelsteine in den Garten tragen. Nimmt er immer 3 Steine auf einmal, dann muß er zwanzigmal gehen. Wie oft muß er gehen, wenn er jedes Mal 4 Steine nimmt?**

**7. 41) Für einen Plattenweg legt man 15 Platten von je 40 cm Länge in eine Reihe. Wie viele Platten von je 60 cm Länge werden für den gleichen Weg benötigt?**

**7. 42) Eine Maschine benötigt zum Stanzen von 100 Deckeln 25 Sekunden. Wie viele Sekunden benötigt sie zum Stanzen von 256 Deckeln?**

**7. 43) Wilfried ist Malergeselle. Er verdient in 40 Stunden 512€.**
**a) Wieviel € verdient er in 54 Stunden?**
**b)Wilfried bekommt 345,60€ ausgezahlt. Wie viele Stunden hat er gearbeitet?**
**c) 5 Gesellen erhalten wöchentlich insgesamt 2160 € ausgezahlt Wieviel € erhalten sechs Gesellen bei gleichem Stundenlohn?**

Lösungen
Hattest du zu jeder Aufgabe ein Bild, das dich zur Lösung führte?
Wenn ja, brauchst du nur die Lösungswege zu vergleichen.
Für eventuellen Nachholbedarf gebe ich dir meine Bilder dazu.

7. 35) Zwei Linien nebeneinander. Die eine in Minuten eingeteilt, die andere in Kilometer. 8 Minuten und 12 Kilometer treffen sich. Daraus ergibt sich die Frage, wieviel Minuten auf eine Kilometer kommen.

8 km ……12 min
1 km……..$\frac{12}{8}$ min
17 km……..$\frac{12*17}{8} = \frac{3*17}{2} = \frac{51}{2} = 25\frac{1}{2}$ min = 25min30sek

7. 36) Arbeitsleistungen, erinnerst du dich? Ich stelle mir eine Wand vor. Sie ist in neun Rechtecke unterteilt. Jedes Rechteck ist die Tagesleistung eines Arbeiters. Das Ganze muß 16 mal erledigt werden. Ein Arbeiter müßte also Tag für Tag je ein Rechteck erledigen. Mehrere Arbeiter teilen die Tagesleistungen unter sich auf.
a) 9 Arbeiter ……..16 Tage
1 Arbeiter ……...9*16 Tage
6 Arbeiter ……$\frac{9*16}{6}$ Tage

b) 16 Tage ……9 Arbeiter
1 Tag ……..9*16 Arbeiter (Für jede Tagesleistung einen Arbeiter!)
12 Tage ……$\frac{9*16}{12} = \frac{3*16}{4}$ = 12Arbeiter

7. 37) Die Kartoffeln seien kiloweise in kleine Netze verpackt. Dann sehe ich, daß sich die 4,50€ aus dem Preis für jedes einzelne Netz zusammensetzen. Also muß ich die 4,50 € wieder auf die 5 Netze verteilen, um auf den Einzelpreis zu kommen. Hat jedes Netz seinen Preis, dann ist Alles klar.
5 kg …….4,50 €
1 kg …….$\frac{4,50}{5}$ €
3 kg …….$\frac{4,50*3}{5} = \frac{0,90*3}{1}$ = 2,70€

7. 38) Hier sehe ich die Ferkelchen in einer Reihe vor ihren Eimerchen mit der Tagesration stehen. Für 30 Tage gibt es 30 Reihen. Das sind die vorhandenen Tagesrationen, die für die 15 Ferkelchen in Fünfzehnerreihen eingeteilt werden müssen.
10 Ferkel ……..30 Tage
1 Ferkel ……..10*30 Tage
15 Ferkel …….. $\frac{10*30}{15}$ Tage = 20Tage

7. 39) Hier könnte man ohne Dreisatz auskommen: Wenn 12 Eier 780g wiegen, dann wiegen 24 Eier das Doppelte, und für weitere sechs Eier käme noch einmal die Hälfte von 780g dazu.
Stelle ich mir 780 einzelne Grammsteine vor und daneben die 12 Eier, dann wirft sich die Frage auf, wie viele Grammsteine kommen auf ein Ei?
12 Eier ……..780g
1 Ei …….$\frac{780}{12}$ g
30 Eier ……$\frac{780*30}{12}$ = 1950 g

7. 40) Ich kann Sven sehen, wie er immer 3Ziegel trägt, und in Gedanken mitaddieren. Sehe ich aber die Steine in 20 Dreierreihen liegen, so drängt sich die Multiplikation auf. Jetzt kann ich die Steine in einer Reihe sehen. Diese ist dann in Viererreihen einzuteilen.
3 Steine ……..20 Gänge
1 Stein …….3*20 Gänge
4 Steine ……$\frac{3*20}{4}$

7. 41) Eine Platte an die andere. Und das 15 mal. Dann habe ich die Weglänge in cm. Diese nun sechziger Abstände einteilen.
40 cm Länge …….15 Platten
1cm Länge ……...40*15 Platten
60 cm Länge ……..$\frac{40*15}{60}$ = 10 Platten

7. 42) Die Deckel kommen auf einer Rutschbahn aus der Maschine. Eine Stoppuhr zeigt 25 Sekunden. Klar, daß kein Deckel eine ganze Sekunde benötigt. (Es gibt ja auch Zehntel- und Hundertstel-Sekunden) Also muß ich zuerst wissen, wie viele Sekundenbruchteile auf einen Deckel kommen. von den 256 Deckeln bekommt dann jeder seinen Bruchteil.
100 Deckel …….25 Sekunden
1 Deckel …….$\frac{25}{100}$ Sekunden
256 Deckel ……$\frac{25*256}{100}$ = 64 Sekunden

7. 43) Eine Lohn-Zeit-Aufgabe. Das hat mit Arbeitsleistungen zu tun. Und davon haben wir ja schon ein Bild! (Meinetwegen eine große Wand in 40 Vierecke eingeteilt)
a)Es sind also 40 Stundenleistungen, auf die die 512 € zu verteilen sind. Wenn damit der Lohn für eine Stunde klar steht, ist es leicht, auf die 54 Stunden zu kommen.
40 Stunden……512€

1 Stunde …….$\frac{512}{40}$€

54 Stunden ……..$\frac{512*54}{40}$€ = 691,20€

b) Von der Aufgabe a) her kennen wir den Stundenlohn. Es wäre nun leicht, auszurechnen, wie oft dieser im neuen Gesamtlohn enthalten ist. Nehmen wir aber mal an, man will eine neue Schlußrechnung von uns: Mit 512€ konnten 40 Stunden „belegt“ werden. Da ist ohne zu rechnen klar, daß auf einem Stundenviereck mehr als ein Euro liegen muß. Ein Euro kann also nur einen Bruchteil von einer Stundenleistung abdecken. Beim Bruchrechnen haben wir gelernt, daß aus einem Bruch viele Ganze werden können, wenn er mit einer entsprechend hohen Zahl multipliziert wird. So ergibt sich aus der Multiplikation des Bruchteils, den ein Euro abdeckt, mit den 345,60€ wie viele ganze Stunden damit „belegt“, beziehungsweise bezahlt werden können.

512€ ……40 Stunden

1€ ……$\frac{40}{512}$ Stunden

345,60€ ……..$\frac{40*345,60}{512}$ = 27 Stunden

c) Typische Situation zum Verteilen oder Austeilen: 5 Gesellen in Berufskleidung sitzen um den Tisch. In der Tischmitte liegen die 2160€. Wieviel bekommt jeder bei gerechter Verteilung? Wenn von sechs Gesellen jeder den gleichen Betrag vor sich liegen hat, dann kommen wir zur Lösung mit einer Multiplikation als Abkürzung der Addition.

5 Gesellen ……2160€

1 Geselle ……..$\frac{2160}{5}$€

6 Gesellen ……$\frac{2160*6}{5}$ = 2592€

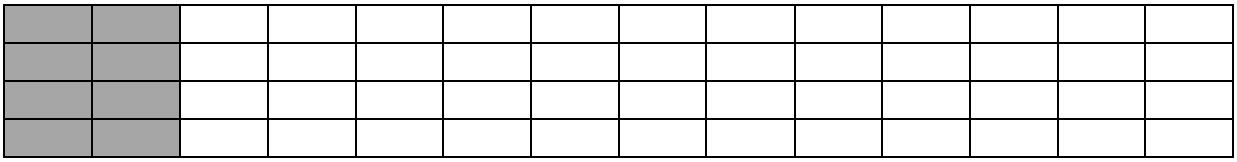
Anmerkung: Wäre auch 2160€ + $\frac{2160}{5}$ als Lösung möglich? Welches Bild steht dahinter?

*Schwierigkeitsgrad 2*

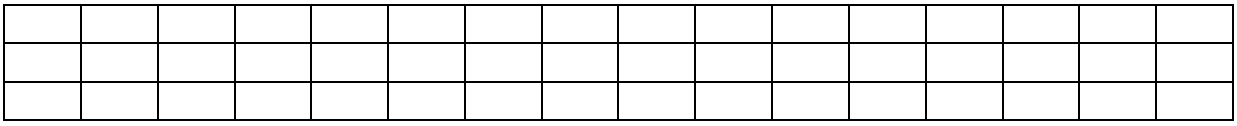
**7. 43)Zum Ausheben eines Grabenstückes benötigen 4 Kleinbagger 14 Stunden. Nach zwei Stunden fällt ein Bagger wegen Maschinenschadens aus.**
**Wie lange dauert das Ausheben nun noch?**

In Stundenleistungen kannst du doch schon denken.
Neu an dieser Aufgabe ist, daß die vier Bagger schon 2 Stunden gearbeitet hatten.
Ist das ein Problem?
Sicher nicht, wenn man nicht in einer vorgegebenen Lösungsform denkt.
Betrachtet man die Aufgabe als eine Geschichte, so ist sie nur länger als die vorherigen.
4 * 2 Stundenleistungen sind schon erbracht. Wenn ich die von den vorgegebenen 14 Stunden abziehe, weiß ich, wie lange die 4 Bagger noch gebraucht hätten, und kann auf dem Weg über einen (= alle noch benötigten Stundenleistungen) auf die 3 umrechnen. Das dürfte jetzt keine Schwierigkeit mehr sein.
Solche „Geschichten“ kann man auch in eine Gleichung umsetzen.
Gefragt ist, wie lange die 3 Bagger noch für das Ausheben brauchen. Also setzen wir:
Für die benötigte Stundenzahl x, das heißt für die 3 Bagger 3x.
(3x heißt so viel wie 3 * x)

Du darfst jetzt mal so richtig lachen, Partner!
Nämlich ich, der Lehrer, habe nur noch in Zahlen gedacht und ausgerechnet, daß die 3 Bagger nur noch 2 Stunden brauchen würden! Ein kapitaler Fehler! (Ist der Alte doch mal wieder so blöd!)
Ich habe nämlich gerechnet: 14h – 8h = 6h. Für 6 Stundenleistungen brauchen die 3 Bagger 2h.
Wenn man im Dreisatz über 1Bagger rechnet, vermeidet man diesen Fehler automatisch.
Um Alles klar zu machen, stellen wir das Ganze mal zeichnerisch dar:



Wir sehen:
Insgesamt sind 4 * 14 Stundenleistungen zu erbringen.
4 * 2 Stundenleistungen sind erbracht und können subtrahiert werden.
Der Rest (oben weiß!) ist von 3 Baggern zu erledigen. Das heißt, er muß in 3 Zeilen eingeteilt werden:



Aufstellen der Gleichung :
Gesamtstundenleistungen – erbrachte Stundenleistungen= 3 * noch benötigte Zeit
(Was links des Gleichheitszeichens in 4 Reihen steht, wird rechts davon in 3 Reihen geordnet)

4 * 14 - 4 * 2 = 3x
56 - 8 = 3x
48 = 3x |:3 (Wir wollen links $\frac{1}{3}$der Stunden, rechts eine Zeilenlänge, 1x)
48 : 3 = 3x : 3
16 = x

Durch |:3 haben wir angezeigt, daß wir auf beiden Seiten durch 3 dividieren werden. Wenn auf beiden Seiten einer Gleichung dieselbe Operation durchgeführt wird, nennt man das eine Äquivalenzumformung.

**7. 44) Zum Aufbringen des Putzes auf die Wände einer Montagehalle brauchen 6 Gipser 8 Tage. Nach 3 Tagen werden zwei Gipser zusätzlich eingesetzt.**
**Wie viele Tage dauert die Arbeit nun noch?**
Kurzfassung:
6 G. 8 Tg./ Nach 3 Tg. 2 G. dazu / Wie viele Tg. noch?

Ist dir klar, daß die erste Zeile des Dreisatzes lauten müßte: „6 Gipser noch 5 Tage“?
Wenn dem so ist, könntest du die Aufgabe wohl problemlos lösen.

Üben wir das Umsetzen der Geschichte in eine Gleichung:
Wenn links des Gleichheitszeichens die noch verbleibenden Tagesleistungen errechnet sind, werden diese links davon in Achterreihen geordnet. Unbekannt ist die Anzahl der Tagesleistungen, die dann auf jeden der nun 8 Gipser kommt.

Gesamt / Abzüglich / Auf 8 verteilt
6 * 8 - 6 * 3 = 8x

Alles klar? Damit am Ende x = dasteht, vertauschen wir die Seiten. Das ist erlaubt, weil links und rechts des Gleichheitszeichens ja dasselbe steht.

8x = 6 * 8 - 6 * 3
8x = 48 - 18
8x = 30 | :8
8x :8 = 30 : 8
x = 3,75
x = 3 Stunden 45 Minuten

Wenn du bei der vorherigen Aufgabe Alles verstanden hast, dürfte es hier wohl auch keine Probleme gegeben haben.
Die Multiplikationen in der ersten Zeile können wir verkürzen:
Von 8 Sechserreihen werden 3 Sechserreihen subtrahiert und es bleiben 5 Sechserreihen übrig.
Wenn wir die Anzahl der Sechserreihen gleich voneinander subtrahieren und dann erst den Gesamtinhalt errechnen, erhalten wir dasselbe Ergebnis. Also gilt:
6 * 8 – 6 * 3 = 6 * (8 – 3) = 6 * 5 = 30
Dieses Verfahren nennt man „Ausklammern“.
Umgekehrt gilt aber auch:
6 * (8 – 3) = 6 * 8 – 6* 3
Das könnte uns bei einer Gleichung helfen, wenn beispielsweise der Inhalt einer Reihe bei der ersten Multiplikation gesucht wäre:

6 * (x – 3) = 30
6 * x - 6 * 3 = 30
6x - 18 = 30 |+18 (Die Äquivalenzumformung zeigt, wie viel 6x ist)
6x -18 +18 = 30 + 18
6x = 48 |: 6 (Wie viel ist 1x?)
6x : 6 = 48 : 6
x = 8

**7. 45) Der Koch eines Frachtschiffes hat einen Brotvorrat angelegt, der für 18 Personen 48 Tage reicht. Nach 4 Tagen kommen 6 weitere Personen an Bord. Wie viele Tage reicht der Vorrat nun?**
Kurzfassung:
Brot für 18 Pers, 48Tg. / Nach 4 Tg. 6 Pers. dazu / Wie lange reicht noch?

Kannst du schon selbst eine Gleichung erstellen?
Oder vielleicht dann, wenn du folgende Fragen durchgearbeitet hast?
Wie stellst du dir den Brotvorrat vor?
18 kleine Laibe für jeden Tag oder Scheiben in Plastikverpackungen?
Ein findiger Schüler ließ einmal den Koch für jede Person pro Tag ein Fladenbrot an die Wand nageln. Das ergab eine gute Übersicht!
Egal, wie du dir den Vorrat vorstellst, wie könnte er nach der Aussage des ersten Satzes geordnet sein? (Bild vorstellen und festhalten)
Was geschieht in den vier Tagen mit den Brotportionen?
Wie müßte der verbliebene Vorrat nach dem hinzukommen von 6 Personen geordnet werden?
Wofür setzen wir x?

Lösungsvorschlag:
Was da war / in 4Tg. Gegessen / Rest neugeordnet
18 * 48 - 18 * 4 = 24x

24x = 18 * 48 - 18 * 4 (Wie würdest du hier ausklammern?)
24x = 864 - 72
24x = 792 |:24
24x : 24 = 792 : 24
x = 33

*Schwierigkeitsgrad 3*

**7. 46) 8 Maler sollen eine Messehalle streichen. Bei 8stündiger täglicher Arbeitszeit soll die Halle in genau 24 Tagen gestrichen sein. Nach 19 Tagen wird ein Maler krank. Ab da arbeiten die anderen 9 Stunden am Tag.**
**Wird die Halle in der geplanten Zeit fertig?**

Was ist hier schwerer?
Es ist eine Angabe mehr, nämlich die Arbeitszeit!
Bemühen wir mal unsere bildhafte Vorstellung:
Wir könnten eine Wand sehen, die in 8 Stundenleitungen für 8 Maurer eingeteilt ist.
Leichter geht es mit einer leicht abstrahierten Darstellung, wie wir sie oben schon für die Stundenleistungen der Bagger verwendet haben.
Wichtig ist, daß wir 8 Reihen mit je 8 Stundenleistungen Inhalt sehen.
Das würden die 8 Maler an einem Tag leisten.
5 Tage stehen noch aus.
Wie sieht es bei den 7 Malern aus?
7 Reihen mit je 9 Stundenleistungen Inhalt!

Wer sein Einmaleins kann, der weiß sofort, daß die 7 Maler eine Stunde weniger pro Tag erbringen.
Also fehlen nach 5 Tagen 5 Stunden.

Dreisatz:
8 Maler 8h pro Tag 5Tage
1 Maler 1h pro Tag 5 * 8 * 8 = 320 Tage
7 Maler 9h pro Tag $\frac{320}{63}$Tage = $5\frac{5}{63}$ Tage

Gleichung
X * 63 = (24 – 19) * 64
X * 63 = 320 | $*\frac{1}{63}$
$\frac{x*63}{63}$ = $\frac{320}{63}$
x = $5\frac{5}{63}$

Die Darstellung in der Bruchschreibweise ist hier zu bevorzugen. $\frac{5}{63}$ besagt, daß hier 5 von den 63 Stunden gemeint sind.

**7. 47) Ein Bauer hat für seine 16 Kühe einen Futtervorrat, der für 105 Tage reicht. Nach 9 Tagen verkauft er 4 Kühe, und nach weiteren 23 Tagen stellt er wieder 3 Kühe dazu. Wie lange reicht der Vorrat insgesamt?**

Kurzfassung:
Für 16 K. 105Tg./ Nach 9Tg. 4K. weg/ 23Tg. Später 3 K. dazu/ Wie lange reicht Vorrat?

Wie können wir uns den Tagesvorrat für eine Kuh vorstellen?
Einen Trog voll? Einen Eimer voll?
Was hat dann jede Kuh am Anfang vor sich stehen? (Reihen? Inhalt einer Reihe?)
Was geschieht in den folgenden 9 Tagen? (Reihen!)
In den 23 Tagen danach? (Reihen!)
Inhalt einer Reihe, wenn nun die 3 Kühe dazukommen?

Wenn das klar ist, können wir einen Term aufstellen, dessen Ergebnis uns sagt, für wie viele Tage der Vorrat noch reicht, wenn die drei Kühe dazugekommen sind.

(16 * 105 – 16 * 9 – 12 * 23) : 15 =
( 1680 - 144 - 276 ) : 15 =

( 1536 - 276 ) : 15 =
1260 : 15 = $\frac{1260:5}{15:5} = \frac{252}{3} = \frac{252:3}{3:3} = \frac{84}{1} = 84$

(Ein uralter Trick, sich durch Kürzen eine Division zu „verkürzen“. Aber man muß sein einmaleins und die Teilbarkeitsregeln kennen!)

Gesamtzeit:
9Tg. + 23Tg. + 84Tg = 116Tg

Fast hätte ich es vergessen: Wir sind ja noch beim Kapitel Zuordnungen. Na gut, die Denkweise ist dieselbe, es muß nur anders geschrieben werden.

| Kühe | Tage | Tagesportionen |
|---|---|---|
| 16 | 105 | 16*105 = 1680 |
| 16 | 9 | 16 * 9 = 144 |
| 12 | 23 | 12 * 23 = 276 |
| 15 | 1260 : 15 = 84 | 1260 |

<u>Gleichungen und Ungleichungen</u>

Da haben wir ja schon ein wenig vorgearbeitet. Rechenregeln, die wir noch nicht kennen, klären wir dort, wo sie auftauchen.

**7. 48) Heiner, Peter und Oskar sind zusammen 44 Jahre alt. Peter ist 4 Jahre älter als Heiner und Oskar ist doppelt so alt wie Heiner.**

Im Rechenbuch stehen zwei Fragen zu dieser Aufgabe, die lasse ich hier weg, ebenso die Kurzfassung.
Warum?
Weil du dir ein Bild von der Aufgabe machen sollst!

Tip: Schilder in den Händen.

Also: Ich sehe links Heiner. Er schaut drein, als hätten ihm die Hühner das Brot weggefressen und hält ein leeres Schild in Händen, oder eins mit einem Fragezeichen drauf.
Daneben Peter. Stolz hält er ein Schild vor sich hin mit der Aufschrift: „Heiner + 4!“
Rechts neben Peter Oskar. Das Schild mit der Aufschrift „4 * Heiner!“ hält er jubelnd über seinen Kopf.
Ist es schwer, auf solche Bilder zu kommen?
Kannst du damit die Gleichung aufstellen?

Setzen wir für Heiners Alter x, dann ist Peter x + 4 Jahre alt und Oskar 2x. Zusammen, also addiert, sind das 44 Jahre.

Heiner + Peter + Oskar = 44
x + x + 4 + 2x = 44 (Wieviel mal ist x da?)
x + 2x +x +4 = 44
4x + 4 = 44 |-4 (Wir wollen sehen, wie viel 4x genau sind)
4x + 4 – 4 = 44 - 4
4x = 40 |:4 (Wie viel ist 1x?)
4x : 4 = 40 : 4
x = 10

x = 10 , x+4 = 14; 2x = 20; 10 + 14 + 20 = 44;

War das schwer? Könntest du eine Ähnliche Aufgabe nun ohne Hilfe lösen?
Kann ja nichts passieren! Du weißt ja: Erst mal meinen Lösungsvorschlag abdecken!

**7. 49) Ein Vater war um 3 Jahre mehr als 12,5 mal so alt wie sein jüngstes Kind. Wie alt war das Kind, wenn der Vater 53 Jahre alt war?**
Vielleicht hast du das Ergebnis schon im kopf ausgerechnet? Stelle trotzdem bitte die Gleichung auf.

Lösungsvorschlag:
Das Alter des Kindes sei x.
Dann ergibt eine 12,5fache Reihe dieses Alters, wenn man 3 dazu addiert, das alter des Vaters.

x * 12,5 + 3 = 53 | - 3
x * 12,5 + 3 – 3 = 53 -3
x * 12,5 = 50 |: 12,5 (Wie dividiert man durch einen Dezimalbruch?)
x * 12,5 : 12,5 = 50 : 12,5
x = 4

Leider kannst du mir nicht sagen, wie es ging.
Wenn dir das Bruchrechnen noch geläufig ist, kannst du auch die folgende Aufgabe erst alleine probieren. (Eigentlich ja jede!) Nur solltest du dir ein genaues Bild des Vorgangs machen, sonst lauert gleich am Anfang ein dicker Fehler!

**7. 50) Cowboy Jim geht pokern. Im ersten Spiel verliert er $\frac{1}{5}$ seiner mitgebrachten Barschaft, gewinnt im zweiten $\frac{1}{3}$ davon zurück, verliert im dritten dann $\frac{1}{6}$ seiner ursprünglichen Barschaft. Dann zählt er sein Geld und hat noch 43,50 Dollar. Wie viel hatte er ursprünglich?**

Lösungsvorschlag:
Auf meinem Bild hat Jim am Anfang seinen Geldbeutel in der Hand. Darin ist seine Barschaft, also x. Was er verliert, kommt da heraus, und was er gewinnt geht da hinein.
Beim ersten Spiel würde er seine Barschaft in 5 Teile zerlegen und einen davon weggeben.
Beim zweiten das Mitgebrachte in 3 Teile und einen davon zu seinem verbliebenen Geld dazulegen.
Beim dritten Spiel geht die ursprüngliche Barschaft in 6 Teile und einer davon wird weggeben.
Dann bleiben ihm 43,50 Dollar.

Barschaft/1.Spiel/2.Spiel/3.Spiel/Rest

$$x - \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}x = 43{,}50 \quad \text{(Gleichgroße Stücke! Auch das Ganze!)}$$

$$\frac{30}{30}x - \frac{6}{30}x + \frac{10}{30}x - \frac{5}{30}x = 43{,}50 \quad \text{(Wie viele Dreißigstel bleiben ihm?)}$$

$$\frac{29}{30}x = 43{,}50 \quad |:\frac{29}{30} \quad \text{(Wie auf } \frac{1}{30}\text{? Und auf } \frac{30}{30}\text{?)}$$

$$\frac{29*30}{30*29}x = \frac{43{,}50*30}{29}$$

$$x = 45{,}00$$

Die Aufgabe ist mit Bruchrechnen lösbar. Man kann die Brüche aber auch gleich am Anfang beseitigen.
Wie?
Man läßt die Nenner verschwinden. Wenn ich einen Bruch mit seinem Nenner multipliziere, kürzt sich der Nenner weg. Damit alle Brüche verschwinden, wird mit dem Hauptnenner multipliziert. Durch die Multiplikation werden die Brüche aber erheblich vergrößert. Damit das Größenverhältnis zu Barschaft und Rest aber erhalten bleibt, müssen diese ebenfalls mit dem Hauptnenner multipliziert werden. Auch das ist eine Äquivalenzumformung.

$$x - \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}x = 43{,}50 \quad |*30$$

$$30 * x - \frac{30*1}{5}x + \frac{30*1}{3}x - \frac{30*1}{6}x = 30 * 43{,}50$$

$$30x - 6x + 10x - 5x = 1305{,}00$$

$$29x = 1305{,}00 \quad |: 29$$

$$29x : 29 = 1305{,}00 : 29$$

$$x = 45{,}00$$

Nehmen wir uns mal ein Zahlenrätsel vor. Hier kann es Leseschwierigkeiten geben:

**7. 51) Multipliziert man die Differenz aus einer unbekannten Zahl und 5 mit 25 und subtrahiert davon die unbekannte Zahl, so erhält man 19.**

Mag sein, du kannst gleich deine Gleichung aufstellen. Schön und gut. Aber ich habe es kürzlich erlebt, daß ein Realschüler aus der achten Klasse diese Aufgabe nicht verstehen und umsetzen konnte.
Will ich einen Satz verstehen, so beginne ich mit der Frage: „Wer tut was?“
Hier „Man“ „multipliziert“ Daran schließt sich die Frage an: „Wen multipliziert man denn?“
Der Text gibt die Antwort: „Die Differenz aus einer unbekannten Zahl und 5“
Begriffsklärung: Differenz heißt eigentlich „Unterschied“. Damit wird das bezeichnet, was wir unter einer Subtraktionsaufgabe verstehen: Von dem Minuenden wird der Subtrahend abgezogen, das steht als Differenz da. Das Ergebnis ist dann der „Wert der Differenz“.
Für unsere Differenz besteht aus der unbekannten Zahl und 5, also x – 5.
Womit wir die Differenz multipliziert?

Klar: 25.
Jetzt der Zusatz, der mit „und“ beginnt, was wird verlangt?
„davon“ heißt, von dem, was bisher zu errechnen war, also wird jetzt x subtrahiert.
„So erhält man …“, damit ist deutlich angezeigt, daß jetzt das Gleichheitszeichen kommen muß.
Wenn der bisher angegebene Term berechnet ist, soll das Ergebnis 19 sein.
Es kann hilfreich sein, eine Textaufgabe in ihre einzelnen Glieder zu zerlegen. Das kann so aussehen:

**7. 51) Multipliziert man/ die Differenz aus einer unbekannten Zahl und 5/ mit 25/ und subtrahiert davon die unbekannte Zahl, / so erhält man 19.**

Läßt man beim Lesen Bilder mitlaufen, so beginnt bei dieser Aufgabe der Film mit dem Multiplikationszeichen. Daraus ergibt sich gleich die Frage, was links und rechts dieses Zeichens steht. Das so erreichte Verständnis zeigt sich dann in der Kurzfassung.
Differenz aus x und 5/multipliziert mit 25/ x davon subtrahiert/ ergibt 19
Daraus kann man gleich die Gleichung formen. Meine erste Fassung wird aber einen Fehler enthalten!
x – 5 * 25 - x = 19
Eine Rechenregel heißt „Punkt vor Strich!“ Dann müßten wir hier erst 5 mit 25 multiplizieren. Aber von x sollen ja nur 5 und keine 125 subtrahiert werden.
„Punkt vor Strich!“ gilt grundsätzlich, weil Multiplikation und Division verfälscht werden, wenn an einer der Reihen etwas verändert wird.
In unserer Aufgabe müssen wir also dafür sorgen, daß erst die Subtraktion erfolgt, dann die Multiplikation:
(x - 5) * 25 - x = 19
Böse Falle: Da wir ja nicht wissen, wie groß x ist, können wir ja auch nicht 5 davon subtrahieren!
Fällt dir etwas ein? Wenn nicht, blättere bitte zurück zu Aufgabe 7. 44). Aha!

```
(x - 5)   *   25 - x    = 19
25x - 125       -x      = 19                (Wir vertauschen die Reihenfolge)
25x - x  - 125          = 19
24x       - 125         = 19     |+125     (Genau wissen, wieviel 24x sind!)
24x       - 125 + 125   = 19 + 125
24x                     =  144   |: 24
24x  :  24              =  144 : 24
  x                     =  6
```

Probe:

```
(6 – 5)  *  25  -6  = 19
   1     *  25 – 6  = 19
```

Der Begriff Differenz wurde geklärt. Es können aber noch andere Begriffe für Rechenoperationen vorkommen:
Summe:
Zum 1. Summanden wird der 2. Summand addiert. Ergebnis ist der Wert der Summe.

Produkt:
Der 1. Faktor wird mit dem 2. Faktor multipliziert. Ergebnis ist der Wert des Produkts.

Quotient:
Der Dividend („der zu Teilende“) wird durch den Divisor (Teiler) dividiert. Ergebnis ist der Wert des Quotienten.

Die nächste Aufgabe wird als Ergebnis eine negative Zahl haben.
Was heißt das?

Normal denken wir, daß es unter 0 nichts mehr gibt. Wir kennen aber das Thermometer oder auch das Bankkonto. Erst bei Minusgraden können wir auf Schnee und Schulausfall infolge Verkehrschaos hoffen.
Die Bank räumt jedem Kontoinhaber einen Überziehungskredit ein. Er kann also mehr Geld ausgeben als auf dem Konto liegt. Nehmen wir an, jemand hat ein Gehalt von 2000€ und gibt 2450€ aus. Dann ist sein Kontostand am Monatsende -450€. Wie ist der Kontostand wenn nun das neue Gehalt überwiesen wird? Um auf 0 zu kommen, müssen zunächst 450€ an die Bank gezahlt werden. Danach ist der Kontostand + 1550€.
- 450 + 2000 = 1550
Klar?
Wenn man mit negativen Zahlen rechnet muß man viele Regeln lernen. Man behält sie leichter, wenn man sich klarmacht, was bei der jeweiligen Regel auf einem Bankkonto vorginge.
Hat man eine Regel vergessen, dann hilft beim Rechnen das Denken an ein Bankkonto.
- 3 * -15 =
Was heißt das?
- 3 kann ich verstehen als es kommt dreimal weg.
- 15 eine Lastschrift, ein Abzug vom Konto
Zusammen: Drei fehlerhafte Abbuchungen von je 15€ sollen rückgängig gemacht werden.
Das heißt doch, die Bank muß sie wieder auf das Konto einzahlen! Also:
- 3 * - 15 = + 45 (Regel: Minus mal Minus gibt Plus!)
Bist du mitgekommen. Vielleicht mußt du den Vorgang noch einige Male durchgehen.

+ 3 * - 15 =
Ein Abzug von 15€ kommt dreimal dazu. Also:
+ 3 * - 15 = - 45 (Regel: Plus mal Minus gibt minus!)

Eine Zahl ohne Vorzeichen, wie z. B. 3 ist immer als positiv, also + 3 anzusehen.

Wenn in der Klassenarbeit Regeln fehlen, immer ruhig bleiben und denken!

(Was ich mir selbst erdenken kann, finde ich immer wieder!)

**7. 52) Multipliziert man die Summe aus einer unbekannten Zahl und 18 mit 3, so erhält man 12.**

(x + 18) * 3 = 12
3x + 54 = 12 |-54
3x + 54 – 54 = 12 – 54 (12 auf dem Konto, 54 werden abgehoben)
3x = - 42 |: 3
3x : 3 = - 42 : 3 (Abzug – 43 in drei Teile!)
x = - 14

Probe:
(- 14 + 18) * 3 = 12
4 * 3 = 12

**7. 53) Wenn ich die Differenz von 12,5 und einer unbekannten Zahl mit – 4 multipliziere, so erhalte ich – 10.**

$(12{,}5 - x) * -4 = -10$
$12{,}5 * -4 - x * -4 = -10$ (-x wird 4 mal weggenommen!)
$-50 + 4x = -10 \quad |+ 50$
$-50 + 50 + 4x = -10 + 50$ (10 fehlen, 50 werden eingezahlt)
$4x = 40 \quad |: 4$
$4x : 4 = 40 : 4$
$x = 10$

Probe.
$(12{,}5 - 10) * -4 = -10$
$2{,}5 * -4 = -10$
$-10 = -10$

**7. 54) Wenn ich zu einer Zahl $\frac{2}{3}$ihrer selbst dazugebe und das Ergebnis mit – 3 multipliziere, so erhalte ich ebenso viel, wie wenn ich das Produkt aus der Zahl und $-\frac{2}{5}$ zu $4\frac{1}{2}$ addiere.**
Lies bitte mehrfach und stelle dir dabei die Umsetzung in eine Gleichung vor.

$(x + \frac{2}{3}x) * -3 = 4\frac{1}{2} + x * -\frac{2}{5}$ (x wird $\frac{2}{5}$ mal weggenommen, $\frac{2}{5}$x Abzüge)
$\frac{5}{3}x * -3 = 4\frac{1}{2} - \frac{2}{5}x$
$-\frac{5*3}{3}x = \frac{9}{2} - \frac{2}{5}x \quad |+\frac{2}{5}x$
$-5x + \frac{2}{5}x = \frac{9}{2} - \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}x$
$-4\frac{3}{5}x = \frac{9}{2}$
$-\frac{23}{5}x = \frac{9}{2} \quad | : -\frac{23}{5}$
$\frac{23*5}{5*23}x = -\frac{9*5}{2*23}$ (links Minus : Minus, rechts Plus : Minus)
$x = -\frac{45}{46}$

Probe:
$(-\frac{45}{46} - \frac{45*2}{46*3}) * -3 = \frac{9}{2} + \frac{45*2}{46*5}$
$(-\frac{45}{46} - \frac{30}{46}) * -3 = \frac{207}{46} + \frac{18}{46}$
$-\frac{75}{46} * -3 = \frac{225}{46}$
$\frac{225}{46} = \frac{225}{46}$

Beim Lösen diese Aufgabe habe ich gedacht: Arme Kinder! Vielleicht liegt das an meinem Alter.
Bei Ungleichungen verwenden wir dieselben Äquivalenzumformungen wie bei Gleichungen.

**7. 55) Ich addiere eine Zahl zu 17, verdoppele das Ergebnis und erhalte mehr als 25.**
Was heißt „mehr als 25“?

( 17 + x) * 2 > 25 (Warum die Klammer?)
2 * 17 + 2x > 25
34 + 2x > 25 |- 34
34 – 34 + 2x > 25 – 34
2x > - 9 |:2
2x : 2 > - 9 : 2
x > - 4,5

Was haben wir da errechnet?
17 + (-4,5) heißt zu 17 kommt eine Auszahlung von 4,5 dazu, also 17 – 4,5

Setzen wir das Ergebnis mal wie bei einer Probe ein.
(17 – 4,5) * 2 > 25
12,5 * 2 > 25 ergibt keine wahre Aussage!
Das heißt also: Jede Zahl, die für x eingesetzt werden kann, muß größer sein als – 4,5!
Zur Angabe der Lösungsmenge müssen wir beachten, daß – 4,5 eine negative Zahl ist als auch ein Dezimalbruch. Die positiven und negativen ganzen Zahlen samt den Brüchen und der 0 nennt man rationale Zahlen.
Wir müssen also angeben, daß unsere Lösungsmenge ein Element der Menge Q, der rationalen Zahlen ist, und daß alle rationalen Zahlen die Gleichung erfüllen, wenn sie größer sind als – 4,5.
L = $\{x \in Q | x < -4{,}5\}$

**7. 56) Addiere ich zum 5fachen einer Zahl 24, so erhalte ich weniger als das 3fache der Zahl.**
Also ist das 3fache der Zahl mehr als die Addition.
Ich gebe zu, hier habe ich mit meiner Vorstellung Schwierigkeiten.

5x +24 < 3x |-24 (Links x alleine!)
5x + 24 – 24 < 3x – 24
5x < 3x – 24 |-3x ( x-Werte links beisammen!)
5x – 3x < 3x – 3x – 24
2x < -24 |: 2
2x : 2 < - 24 : 2
x < - 12

Kleiner als – 12 können negative Zahlen und Brüche mit dem Vorzeichen – sein.

L = {x∈ $Q$| x < - 12}

**7. 57) Subtrahiert man eine Zahl von 40, so ist das Ergebnis größer, als wenn das 7fache der Zahl um 8 vermindert wird.**
„Vermindern um?“ Danach ist der vorliegende Betrag genau um die genannte Zahl weniger!

40 – x > 7x -8 |-40 (Links x allein)
40 – 40 – x > 7x – 8 – 40
- x > 7x - 48 |-7x (x Glieder zusammen auf linke Seite)
- 7x – x > - 48
- 8x > - 48 |: -8
- 8x : - 8 > - 48 : - 8
x < 6

Das Umdrehen des Zeichens in der letzten Zeile ist kein Versehen. Wenn eine Ungleichung auf beiden Seiten mit derselben negativen Zahl multipliziert wird, so ändern sich die Vorzeichen, darum muß das > oder< umgedreht werden.
Versuche mal die Probe zu dieser Ungleichung mit 6. Was passiert?
Es wird eine Gleichung!
Dann versuche es mit 5,9!
Also muß x kleiner sein als 6!
L = $\{x \in Q | x < 6$

An diesem Zahlenbeispiel soll die Notwendigkeit des Umdrehens deutlicher werden.

- 4x < 20 |:- 4
- 4x : - 4 < 20 : - 4
x > -5

Links wurde aus Minus plus, und rechts aus Plus Minus. Ein einziger Euro als Guthaben ist immer noch mehr als jede Menge Schulden!
Wenn du Proben rechnest, wirst du feststellen, daß ab 4,9 die Ungleichung erfüllt ist. Nimmst du positive Zahlen für x, so entsteht links immer ein negativer Wert,

**7. 58) Wenn du raten kannst, wie viele Nüsse ich habe, so sollt du den 7. Teil und 4, oder, was dasselbe ist, den dritten Teil weniger 4 erhalten. Wie viele Nüsse habe ich?**

Für den 7. Teil und den 4. Teil müßten wir doch Bilder haben.
Gefragt ist die Anzahl der Nüsse.
Auf beiden Seiten einer Gleichung steht dasselbe, wenn auch verschieden geordnet.

$\frac{x}{7}$ + 4 = $\frac{x}{3}$ - 4 |* 21 (Wir beseitigen die Nenner)
$\frac{x*21}{7}$ +4 * 21 = $\frac{x*21}{3}$ - 4 * 21
3x + 84 = 7x - 84 |- 84
3x + 84 – 84 = 7x – 84 – 84
3x = 7x - 168 |- 7x
3x - 7x = 7x – 7x – 168
- 4x = - 168 | * - 1 (Wir verändern die Vorzeichen)
- 4x * -1 = -168 * -1
4x = 168 |: 4
4x : 4 = 168 : 4
x = 42

Probe:
$\frac{42}{7}$ + 4 = $\frac{42}{3}$ - 4
6 + 4 = 14 - 4

**7. 59) Eine chinesische Arithmetik enthält folgende Aufgabe: In einem Stalle sind Kaninchen und Fasanen. Sie haben zusammen 35 Köpfe und 98 Füße. Wie viele Tiere von jeder Art?**

Ist dir schon was eingefallen?

Wenn dir die Aufgabe schwer vorkommt, dann deswegen, weil wir hier zunächst zwei unbekannte Zahlen haben.
Stellen wir uns den Stall mal vor: Ausgewachsene Stallhasen (biologisch eigentlich Kaninchen) hält man einzeln in Hasenkästen. So sehe ich denn an der Rückwand des Stalles eine Reihe von Kästen. Davor wuseln die Fasanen durcheinander. Die Kästen wären leichter zählbar.
So setze ich mal für die Anzahl der Hasen x.
Was ist dann mit den Fasanen?
Hasen und Fasanen sind zusammen 35.
Hatten wir nicht schon Aufgaben, bei denen ein bekannter Betrag auf dem Konto war, ein unbekannter dazukam und der Kontostand danach wiederum angegeben war?
Wie kamen wir zu dem unbekannten Betrag?
Fällt jemand das Wort „Umkehrung“ ein?
Wenn die Anzahl der Hasen x ist, dann ist die Anzahl der Fasanen 35 – x.
Hasen haben bekanntlich vier Beine. Wenn ich also ihre Anzahl mit 4 multipliziere und die Anzahl der Fasanen mit 2, dann ergibt das zusammen in diesem Stall 98.
Damit habe ich bereits meine Gleichung.
Warum werde ich die Anzahl der Fasanen in Klammer setzen müssen?

$$
\begin{aligned}
x * 4 + (35 - x) * 2 &= 98 \\
4x + 70 - 2x &= 98 \\
4x - 2x + 70 &= 98 \\
2x + 70 &= 98 \quad |-70 \\
2x + 70 - 70 &= 98 - 70 \\
2x &= 28 \quad |: 2 \\
2x : 2 &= 28 : 2 \\
x &= 14
\end{aligned}
$$

Probe:

$$
\begin{aligned}
14 * 4 + (35 - 14) * 2 &= 98 \\
56 + 21 * 2 &= 98 \\
56 + 42 &= 98
\end{aligned}
$$

Na, wer sagt’s denn?

Nun noch eine altertümliche Aufgabe zum Schmunzeln:

**7. 60) Ein Schäfer hütete eine kleine Anzahl von Schafen. Ein Geck, welcher vorüberging, wollte ihn foppen und sprach: „Das Hüten deiner 100 Schafe muß dir nicht leicht werden.“ – „100 sind es lange nicht,“ antwortete der Schäfer, „wenn ich noch 1 mal, noch $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{10}$ mal so viel hätte, als ich habe, und dich dazu, dann hätte ich erst 100 Schafe.“**
**Wie groß war die Anzahl der Schafe?**

Probleme mit der altertümlichen Sprache? Oder hast du gar schon deine Gleichung?

Wenn nicht, was tut der Schäfer mit der unbekannten Anzahl seiner Schafe?

Da stehen sie! „Noch 1mal … so viel“, also er stellt die gleiche Anzahl dazu, dann teilt er die, die er ursprünglich hatte in 4, in 8 in 10 Reihen und stellt je eine dazu. Und wenn er noch den herausgeputzten Gecken dazustellt, ist das Ergebnis 100!

$$x + x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{10}x + 1 = 100$$
$$2x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{10}x + 1 = 100 \quad |* 40$$
$$2x * 40 + \frac{1*40}{4}x + \frac{1*40}{8}x + \frac{1*40}{10}x + 1 * 40 = 100 * 40$$
$$80x + 10x + 5x + 4x + 40 = 4000$$
$$99x + 40 = 4000 \quad |-40$$
$$99x - 40 + 40 = 4000 - 40$$
$$99x = 3960 \quad |: 99$$
$$99x : 99 = 3960 : 99$$
$$x = 40$$

Probe:
$40 + 40 + 10 + 5 + 4 + 1 = 100$
$100 = 100$